RELI 26.2.2011.

Algebra

1. Ako su $a, b, c > 0$ i $abc = 1$, dokažite da vrijedi
$$\frac{a}{(a+1)(b+1)} + \frac{b}{(b+1)(c+1)} + \frac{c}{(c+1)(a+1)} \geq \frac{3}{4}$$
.

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ (skup prirodnih brojeva s nulom) je funkcija za koju vrijedi
   (i) $f(ab) = f(a) + f(b)$, za svaki $a, b \in \mathbb{N}$
   (ii) $f(n) = 0$ za $n \equiv 3 (\text{mod } 10)$
   (iii) $f(10) = 0$.
   Odredite $f(1985)$.

3. Zadan je realan broj x. Neka je P minimalni polinom racionalnih koeficjenata i vodećim koeficjentom 1 takav da je $P(x) = 0$. Dokažite da za sve ostale polinome G s racionalnim koeficijentima za koje je $G(x) = 0$ vrijedi $P|G$.

4. Neka su a, b, c realni brojevi takvi da je $|a|^3 \geq bc$ Dokažite da je $b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ ako je $a^6 + b^6 + c^6 \geq \frac{1}{27}$.

5. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{1}{a^2+b^2+1} + \frac{1}{b^2+c^2+1} + \frac{1}{c^2+a^2+1} \geq 1$. Dokažite da je $ab + bc + ca \leq 3$.

6. Nađite sve monotone funkcije $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi $f(ab) = f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{R}^+$.

Kombinatorika

1. Dan je konveksan poligon s $n \geq 5$ stranica. Dokažite da postoji najviše $\frac{n(2n-5)}{3}$ trokuta površine 1 s vrhovima među vrhovima danog poligona.

2. Brojevi $1, 2, 3, \ldots, 2011$ sortirani su silazno. U svakom koraku dozvoljeno je odabrati neka dva broja i zamjeniti im mjesta. Takvim potezima očito možemo sortirati niz uzlazno, ali možemo to napraviti raznim brojem poteza. Dokažite da je broj potrebnih poteza uvijek neparan!

3. Dokažite da se na svaku kvadratnu šahovsku ploču neparnih dimenzija $\geq$ 7 x 7 mogu postaviti nepreklapajuće L-triomine koje prekrivaju sva crna polja (kutna polja su crna).

4. Jerry je za rođendan dobio od Toma kocku sira dimenzija n x n x n, gdje je $n = 4k + 3$ za neki prirodni k. Tom mu je postavio jednostavan uvjet: smije ju pojesti samo ako može početi jesti iz jednog od vrhova kocke, a završiti u središnjoj kockici (pritom Jerry mora jesti tako da nakon što pojede jednu kockicu, predje na susjednu). Može li Jerry to izvesti?

5. Igra za dva igrača! Igrači imaju po 1006 karata s brojevima na njima - Ivo ima karte s brojevima $2, 4, \ldots, 2012$, a Marko ima karte s brojevima $1, 3, \ldots, 2013$. U svakom potezu, igrač baca jednu svoju kartu i stavlja je na stol - protivnik je vidi i zatim baca jednu svoju kartu. Štih nosi igrač koji je bacio veću kartu. On takodjer otvara idući štih. Ivo započinje igru. Nakon 1006 štihova igra je gotova - Ivo je potrošio sve svoje karte, a Marku je ostala jedna u ruci. Koji je najveći broj štihova koji Marko može sigurno osvojiti, bez obzira na protivnikovu igru? A koliko štihova Ivo može zasigurno osvojiti?

Geometrija

1. Neka su h_a, h_b, h_c visine trokuta ABC, a r polumjer njemu upisane kružnice. Dokažite nejednakosti

$$\frac{3}{5} \leq \frac{h_a - 2r}{h_a + 2r} + \frac{h_b - 2r}{h_b + 2r} + \frac{h_c - 2r}{h_c + 2r} < \frac{3}{2}$$

.

2. Unutar trokuta ABC odabrana je točka P takva da je $\angle PAC = \angle PBC$. Nožišta okomica iz P na AC i BC su točke M i N. Ako je D polovište stranice $\overline{AB}$, dokažite da je $|DM| = |DN|$.

3. Neka su u trokutu ABC točke D, E i F nožišta visina iz vrhova A, B i C, a točka H ortocentar. Točka G je polovište od AH, a S sjecište pravaca EF i AH. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, a N sjecište kružnice opisane trokutu BCH i dužine $\overline{AM}$ dokažite da je $\angle GNS = \angle AMH$.

4. Zadan je trokut ABC takav da je $|AB| = 5$. Neka je P polovište stranice $\overline{BC}$ i D točka sa suprotne strane pravca AC od točke B takva da je $\angle BDC = 35°$. Dužine $\overline{BD}$ i $\overline{CA}$ sijeku se u E. Ako je $|AE| = 1, \angle BCA = 55°, \angle CAP = 35°$ odredite $|BE| \cdot |DE|$.

5. Niz kružnica $k_1, k_2, ...$ upisanih u parabolu $y = x^2$ takav je da se k_n i $k_{n+1}, n \geq 1$ dodiruju izvana. Odredite promjer kružnice k_{2011} ako k_1 ima promjer jednak 1 i dira parabolu u $(0, 0)$.

6. Neka su α, β, γ kutevi trokuta ABC te l_a, l_b, l_c duljine odsjecaka simetrala odgovarajućih kuteva. Dokažite jednakost

$$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{l_c} + \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{l_a} + \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{l_b} = 0$$

.

Teorija brojeva

1. Koliko ima prirodnih brojeva u $[1115, 2115]$ koji su djeljivi s odgovorom na ovo pitanje?

2. Odredite prirodne brojeve $a_1, \ldots, a_{12}$, tako da je

$$a_1^6 + a_2^6 + ... + a_{12}^6 = 450697.$$

3. Dokažite da je $2^{2^k-1} - 2^k - 1$ složen za svaki $k > 2$.

4. Dokažite da za svaki prirodni broj n vrijedi nejednakost

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\tau(k)}{k^2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right)^2,$$

pri čemu $\tau(k)$ označava *broj djelitelja* prirodnog broja k, npr. $\tau(12) = 6$.

5. Odredite sve prirodne brojeve x, y, z, t takve da je $1 + 5^x = 2^y + 2^z \cdot 5^t$