Međunarodni matematički Turnir gradova
Juniori, O-dio, proljeće 2011.
3. i 4. razredi

5. ožujka 2011.

Rješenja

1. Stranice konveksnog poliedra su slični trokuti. Dokažite da taj poliedar ima dva para međusobno sukladnih stranica. (*3 boda*)

Rješenje. Ukoliko su sve strane poliedra sukladne (a ne samo slične), tada je tvrdnja trivijalna jer svaki poliedar ima najmanje 4 strane.
Ukoliko nisu sve strane sukladne, moguće je naći najveću i najmanju stranu (sličnost svih strana nam dopusta da ih lako uredimo po velicini). Gledajmo najveću stranu i, posebno, najdulji brid na toj strani. Taj brid dijele dvije strane i lako je zaključiti kako su obje te strane sukladne jer ukoliko toj drugoj strani taj brid ne bi bio najdulji, imali bi veći brid što je nemoguće. Dalje, budući da dva slična lika imaju jednaku najdulju stranu, oni moraju biti sukladni. Tako smo našli par sličnih strana.
Analogno se pokaže tvrdnja za najmanju stranu gledajući najkraći brid na njoj. Dana argumentacija nam nalazi dva disjunktna para sukladnih strana.

2. Duljina odraslog crva je 1 metar. Ako je crv odrastao, moguće ga je prerezati na dva dijela (bilo kojeg omjera duljina). Tako od jednog nastaju dva crva koji odmah počinju rasti brzinom od jednog metra po satu. Kada crv naraste do 1 metra duljine, prestaje rasti (i smatra se odraslim). Je li moguće od jednog odraslog crva dobiti 10 njih u manje od sat vremena? (*5 bodova*)

Rješenje. pogledati 3. zadatak Juniora

3. Sto bijelih kamenčića raspoređeno je u krug. Dan ke prirodan broj $k \leq 50$. U svakom potezu, odaberemo k uzastopnih kamenčića od kojih su prvi i zadnji bijeli, te obojamo ta dva rubna kamenčića u crno. Za kakve k je moguće u konačnom borju poteza oboajti sve kamenčiće u crno? (*4 boda*)

Rješenje. Zbog lakšeg označavanja, zamijenit cemo k s $m+1$.
Označimo sada kamenje redom kojim smo ih postavljali u krug, $1, 2, 3, \ldots, 100$ .Pretpostavimo da smo prvo obojali kamen broj 1 i kamen broj $m+1$. Tada, ako želimo obojati kamen $2m+1$ moramo ga obojati u paru s $3m$+1, odnosno , općenito ako želimo obojati kamen $2nm+1$, moramo ga obojati u paru s $(2n+1)m+1$ (svi brojevi gledamo modulo 100). Ako slučajno to nije moguće, onda nije moguće obojati kamenje. Općenito, kad tako kružimo kroz $ogrlicukamenja$ jedini način da stanemo je da u nekom trenu ne možemo obojati slijedeći par kamenja, a do toga doalzimo kada vrijedi $(2n+1)m+1 = 1$ (mod 100) (jer onda ne možemo upariti kamen na mjestu $2nm+1$ ni sa kojim preostalim kamenom), a navedena situacija se događa kad je $(2n+1)m = 0$ (mod 100) sto znaci da $4|m$.
Sada još moramo pokazati da ako 4 ne dijeli m da onda možemo obojati svo kamenje. Ako je $d = mjera(m, 100)$ (d može biti vrlo male vrijednosti, može biti 1,2,5,10,25,50) onda se točno $\frac{100}{d}$ kamenja oboja u jednom kruženju oko ogrlice i u prvom kruženju (dakle, onom koje pocinje od kamena 1) se oboja svo kamenje koje daje isti ostatak $modulod$ kao broj 1. Prema tome, ako onda krenemo istim postupkom od kamena broj 2 pa kamena broj 3 pa sve do kamena broj $d-1$ obojat ćemo sve kamenje.

4. Okomice iz četiri različita vrha peterokuta na nasuprotne stranice sijeku se u jednoj točki. Dokažite da i okomica iz petog vrha prolazi istom točkom. (*5 bodova*)

Rješenje. Neka je ABCD naš peterokut i neka se navedene okomice M, BN, DK, EL sijeku u točki S. Treba dokazati da je CS okomito na AE.
To je ekvivalentno sa $\overline{CE}^2 - \overline{CA}^2 = \overline{SE}^2 - \overline{SA}^2$. Dakle dokazat cemo potonju jednakost.

Prema tome imamo:

$$
\begin{aligned}
&\overline{CE}^2 - \overline{CA}^2 \\
&= (\overline{CL}^2 + \overline{LE}^2) - (\overline{CM}^2 + \overline{MA}^2) \\
&= \overline{CL}^2 + (\overline{SL} + \overline{SE})^2 - \overline{CM}^2 - (\overline{SA} + \overline{SM})^2 \\
&= \overline{CL}^2 + \overline{SL}^2 + \overline{SE}^2 + 2 \cdot \overline{SL} \cdot \overline{SE} - \overline{CM}^2 - \overline{SA}^2 - \overline{SM}^2 - 2 \cdot \overline{SA} \cdot \overline{SM} \\
&= \overline{SE}^2 - \overline{SA}^2 + (\overline{CL}^2 + \overline{SL}^2 - \overline{CM}^2 - \overline{SM}^2) + 2(\overline{SL} \cdot \overline{SE} - \overline{SA} \cdot \overline{SM})
\end{aligned}
$$

Gotovi smo čim pokažemo da su dvije zagrade u gornjem izrazu jednake nuli. Za prvu je to dosta očito, a za drugu zaključujemo na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
AKMD \text{ je tetivan, pa } \overline{SA} \cdot \overline{SM} &= \overline{SK} \cdot \overline{SD} \\
KBDN \text{ je tetivan, pa } \overline{SK} \cdot \overline{SD} &= \overline{SB} \cdot \overline{SN} \\
BLNE \text{ je tetivan, pa } \overline{SB} \cdot \overline{SN} &= \overline{SL} \cdot \overline{SE}
\end{aligned}
$$

Iz gornje tri jednakosti slijedi $\overline{SA} \cdot \overline{SM} = \overline{SL} \cdot \overline{SE}$, pa je i druga zagrada gore jednaka nuli.

5. U nekoj zemlji ima sto gradova i neki broj cesta. Svaka cesta spaja dva grada i ceste se ne sijeku. Koristeći te ceste moguće je iz bilokojeg grada doći u svaki drugi grad te države. Dokažite da je moguće označiti neke ceste kao glavne, tako da iz svakog rada vodi neparan broj glavnih cesta. (*5 bodova*)

Rješenje. Najprije, dok god postoji neki ciklus, obrišemo neku cestu iz tog ciklusa i to činimo dok nam ne ostane stablo. Potom u tom stablu odaberemo one ceste koje razdvajaju stablo na dva dijela s neparnim brojem gradova.
Još je potrebno dokazati da iz svakog grada ide neparan broj takvih cesta: to slijedi iz činjenice da je ukupan broj gradova paran.

Ukupan rezultat računa se na temelju tri najbolje riješena zadatka.
Bodovi pojedinih dijelova istog zadatka se zbrajaju.