

## HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

prvi dan

9. travnja 2011.

1. Dokaži da za pozitivne realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  za koje je  $a + b + c = 3$  vrijedi

$$\frac{a^2}{a + b^2} + \frac{b^2}{b + c^2} + \frac{c^2}{c + a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

2. Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.
3. U trokutu  $ABC$  s težištem  $T$  i središtem opisane kružnice  $O$  vrijedi  $OT \perp AT$ . Neka je  $A'$  drugo sjecište pravca  $AT$  i kružnice opisane trokutu  $ABC$ . Neka je točka  $D$  sjecište pravaca  $BA'$  i  $AC$ , a točka  $E$  sjecište pravaca  $CA'$  i  $AB$ . Dokaži da središte kružnice opisane trokutu  $ADE$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .
4. Neka su  $a$  i  $b$  relativno prosti prirodni brojevi različiti od 1. Definiran je niz

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}} \quad \text{za } n \geq 3.$$

Dokaži da niti jedan član  $x_n$  ovog niza, osim prva dva, nije prirodni broj.

# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

prvi dan

Rješenja zadataka

## Zadatak 1.

Dokaži da za pozitivne realne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  za koje je  $a + b + c = 3$  vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

### Prvo rješenje.

Član  $\frac{a^2}{a+b^2}$  možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b^2} &= \frac{a(a+b^2) - ab^2}{a+b^2} = a - \frac{ab^2}{a+b^2} \\ &\stackrel{\text{A-G}}{\geq} a - \frac{ab^2}{2b\sqrt{a}} = a - \frac{b\sqrt{a}}{2}. \end{aligned}$$

Ako i druga dva člana lijeve strane tražene nejednakosti ocijenimo na isti način dobijemo da vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} &\geq \left(a - \frac{b\sqrt{a}}{2}\right) + \left(b - \frac{c\sqrt{b}}{2}\right) + \left(c - \frac{a\sqrt{c}}{2}\right) \\ &= (a+b+c) - \frac{1}{2}(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}) \\ &= 3 - \frac{1}{2}(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}). \end{aligned}$$

Uvedemo li supstituciju  $x = \sqrt{a}$ ,  $y = \sqrt{b}$  i  $z = \sqrt{c}$ , vidimo da je dovoljno dokazati da je

$$3 - \frac{1}{2}(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq \frac{3}{2},$$

odnosno  $xy^2 + yz^2 + zx^2 \leq 3$ , pri čemu je  $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ .

Sada imamo:

$$\begin{aligned} 3(xy^2 + yz^2 + zx^2) &= 2xy^2 + xy^2 + 2yz^2 + yz^2 + 2zx^2 + zx^2 \\ &= y(2xy + z^2) + x(2zx + y^2) + z(2yz + x^2) \\ &\stackrel{\text{G-A}}{\leq} y(x^2 + y^2 + z^2) + x(z^2 + x^2 + y^2) + z(y^2 + z^2 + x^2) \\ &= 3(x+y+z) \stackrel{\text{A-K}}{\leq} 9\sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}} = 9, \end{aligned}$$

odakle slijedi tražena nejednakost.

### Drugo rješenje.

Primjenom Cauchy-Schwarz nejednakosti dobijemo

$$\left( \frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \right) [a^2(a+b^2) + b^2(b+c^2) + c^2(c+a^2)] \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2,$$

odnosno

$$\left( \frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \right) \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

stoga je dovoljno dokazati da vrijedi:

$$\frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{a^3 + b^3 + c^3 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

Posljednja nejednakost redom je ekvivalentna s

$$\begin{aligned} & 2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \\ \Leftrightarrow & 2(a^4 + b^4 + c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 3(a^3 + b^3 + c^3) \\ \Leftrightarrow & 2(a^4 + b^4 + c^4) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3) \\ \Leftrightarrow & a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq ab^3 + ac^3 + ba^3 + bc^3 + ca^3 + cb^3. \quad (*) \end{aligned}$$

Korištenjem A-G nejednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2b^2 &\geq 2a^3b, & b^4 + b^2c^2 &\geq 2b^3c, & c^4 + c^2a^2 &\geq 2c^3a \\ a^4 + c^2a^2 &\geq 2a^3c, & b^4 + a^2b^2 &\geq 2b^3a, & c^4 + b^2c^2 &\geq 2c^3b. \end{aligned}$$

Zbrajanjem gornjih nejednakosti dobijemo

$$2(a^4 + b^4 + c^4 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(ab^3 + ac^3 + ba^3 + bc^3 + ca^3 + cb^3),$$

čime smo dokazali da vrijedi (\*), a prema tome i početna nejednakost.

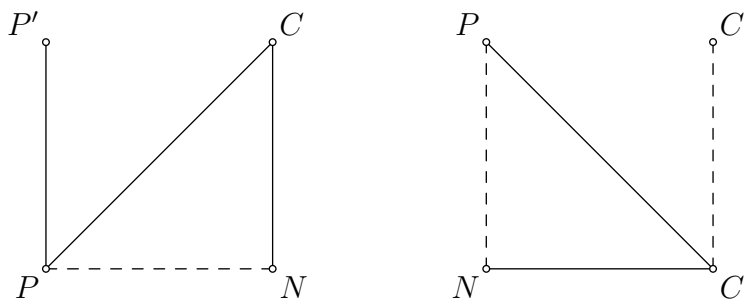
## Zadatak 2.

Na nekoj zabavi među bilo koje četiri osobe postoje tri koje se sve međusobno poznaju ili postoje tri koje se međusobno ne poznaju. Poznanstva su uzajamna. Dokaži da se svi sudionici te zabave mogu smjestiti u dvije prostorije tako da se u jednoj prostoriji svi međusobno poznaju, a u drugoj nitko nikoga ne poznaje.

### Prvo rješenje.

Tvrđnju zadatka dokazat ćemo matematičkom indukcijom. Ako su na zabavi prisutne samo četiri osobe, odaberimo tri koje se međusobno poznaju ili ne poznaju i smjestimo ih u jednu prostoriju, a preostalu osobu u drugu. Time je ispunjena tvrdnja zadatka za zabavu s četiri osobe.

Pretpostavimo da smo uspjeli smjestiti  $n \geq 4$  osoba u prostorije  $\mathcal{P}$  i  $\mathcal{C}$  tako da se u prostoriji  $\mathcal{P}$  svi međusobno poznaju, a u prostoriji  $\mathcal{C}$  nitko nikoga ne poznaje. Dokažimo da i  $(n + 1)$ -vu osobu (označimo je s  $N$ ) možemo smjestiti u jednu od prostorija tako da prethodno navedeno svojstvo ostane zadovoljeno. Ako osoba  $N$  poznaje sve osobe iz prostorije  $\mathcal{P}$ , traženo će svojstvo biti zadovoljeno ako osobu  $N$  smjestimo u prostoriju  $\mathcal{P}$ . Analogno, ako osoba  $N$  ne poznaje nikoga iz prostorije  $\mathcal{C}$ , traženo će svojstvo biti zadovoljeno ako osobu  $N$  smjestimo u prostoriju  $\mathcal{C}$ .



U preostalom slučaju, postoji osoba  $P$  iz prostorije  $\mathcal{P}$  koju  $N$  ne poznaje i osoba  $C$  iz prostorije  $\mathcal{C}$  koju  $N$  poznaje. Razmotrit ćemo slučaj u kojem se osobe  $P$  i  $C$  poznaju, u drugom slučaju se tvrdnja dokazuje na sličan način.

Neka je  $P' \neq P$  proizvoljna osoba iz prostorije  $\mathcal{P}$ . Prema uvjetu zadatka, među osobama  $N, C, P$  i  $P'$  nužno postoje tri koje se međusobno poznaju ili tri koje se međusobno ne poznaju. Da bi ovaj uvjet mogao biti ispunjen za neke tri osobe, očito je da se osobe  $P'$  i  $C$  moraju poznavati. Dakle, osoba  $C$  poznaje sve osobe iz prostorije  $\mathcal{P}$ .

Slično, neka je  $C' \neq C$  proizvoljna osoba iz prostorije  $\mathcal{C}$ . Prema uvjetu zadatka, među osobama  $N, P, C$  i  $C'$  nužno postoje tri koje se međusobno poznaju ili tri koje se međusobno ne poznaju. Jedine tri osobe za koje ovaj uvjet može biti ispunjen su osobe  $N, P$  i  $C'$ , i to u slučaju kada se one međusobno ne poznaju. Dakle, osobe  $P$  i  $N$  ne poznaju nikoga iz prostorije  $\mathcal{C}$  osim osobe  $C$ .

Iz prethodna dva zaključka vidimo da traženi uvjet možemo ispuniti tako da osobu  $P$  premjestimo u prostoriju  $\mathcal{C}$ , osobu  $C$  premjestimo u prostoriju  $\mathcal{P}$ , a osobu  $N$  smjestimo u prostoriju  $\mathcal{C}$ .

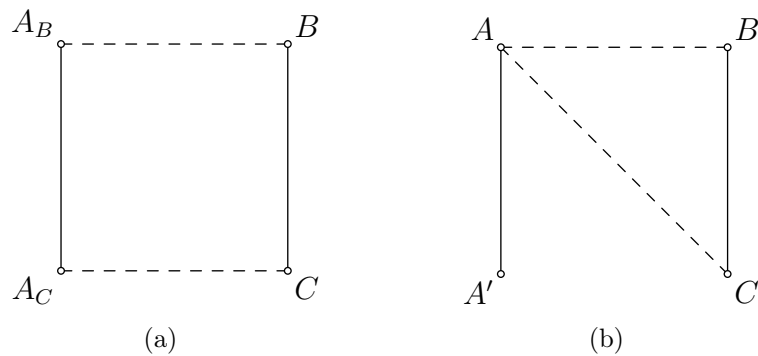
Dakle, i  $n + 1$  osoba možemo smjestiti na traženi način pa tvrdnja zadatka slijedi po principu matematičke indukcije.

### Drugo rješenje (Grgur Valentić).

Osobe i poznanstva možemo prikazati potpunim grafom obojenim s dvije boje u kojem vrhovi predstavljaju osobe, plavi bridovi poznanstva, a crveni bridovi nepoznanstva. Za neki skup s  $m$  vrhova kažemo da je plavi (crveni)  $m$ -terokut ako su svaka dva vrha među njima povezana plavim (crvenim) bridom.

Uočimo da zbog danog svojstva, u grafu sigurno postoji crveni ili plavi trokut (ako se ograničimo na netrivialne slučajeve u kojima graf ima barem  $n \geq 4$  vrhova). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da u grafu postoji crveni trokut. Promatrajmo najveći crveni  $k$ -terokut. Neka je  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  skup njegovih vrhova. Ako su među ostalih  $n - k$  vrhova svi bridovi plavi, tada smjestimo osobe iz skupa  $\mathcal{A}$  u jednu, a ostale osobe u drugu prostoriju i zadatak je riješen.

Pokažimo da je drugi slučaj neostvariv. Pretpostavimo da postoje vrhovi  $B$  i  $C$  povezani crvenim bridom, a nisu u  $\mathcal{A}$ . Tada postoji vrh  $A_B \in \mathcal{A}$  koji je plavim bridom povezan s vrhom  $B$  jer bi u suprotnom imali crveni  $(k + 1)$ -terokut. Analogno zaključujemo da postoji vrh  $A_C \in \mathcal{A}$  koji je plavim bridom povezan s vrhom  $C$ .



Slika 1: PUNE linije označavaju crvene, a isprekidane plave bridove.

Razlikujemo dva slučaja. Ako je  $A_B \neq A_C$ , tada je iz Slike 1(a) jasno da među vrhovima  $B, C, A_B$  i  $A_C$  ne može postojati jednobojni trokut, što je uvjet zadatka.

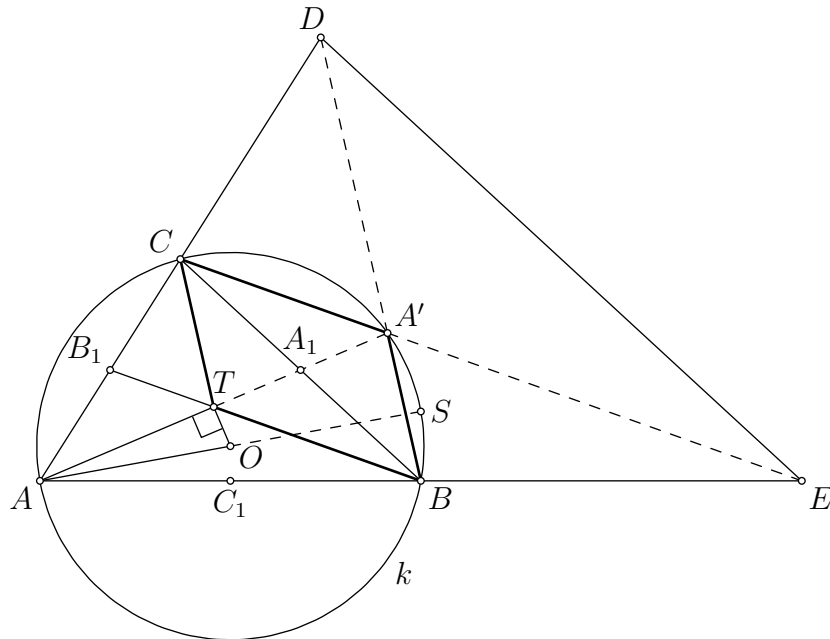
S druge strane, pretpostavimo da je  $A_B = A_C = A$ , za neki  $A \in \mathcal{A}$ . Neka je  $A' \in \mathcal{A}$  proizvoljna osoba različita od osobe  $A$ . Slika 1(b) prikazuje situaciju koju imamo među vrhovima  $A, A', B$  i  $C$ . Očito je da ako imamo jednobojni trokut u tom skupu vrhova (a tako mora biti zbog uvjeta zadatka), vrh  $A'$  mora biti crvenim bridom povezan i s  $B$  i s  $C$ . Dakle,  $B$  i  $C$  su crvenim bridom povezani vrhovi koji su isto i crvenim bridom povezani sa svakim vrhom iz  $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ . No, tada je  $(\mathcal{A} \setminus \{A\}) \cup \{B, C\}$  crveni  $(k + 1)$ -terokut, što je opet kontradikcija.

### Zadatak 3.

U trokutu  $ABC$  s težištem  $T$  i središtem opisane kružnice  $O$  vrijedi  $OT \perp AT$ . Neka je  $A'$  drugo sjecište pravca  $AT$  i kružnice opisane trokutu  $ABC$ . Neka je točka  $D$  sjecište pravaca  $BA'$  i  $AC$ , a točka  $E$  sjecište pravaca  $CA'$  i  $AB$ . Dokaži da središte kružnice opisane trokutu  $ADE$  leži na opisanoj kružnici trokuta  $ABC$ .

### Rješenje.

Neka su  $A_1, B_1$  i  $C_1$  redom polovišta stranica  $\overline{BC}, \overline{CA}$  i  $\overline{AB}$ . Označimo opisanu kružnicu trokuta  $ABC$  s  $k$ .



Uočimo da iz  $OT \perp AA'$  slijedi da je  $OT$  simetrala tetive  $\overline{AA'}$  kružnice  $k$  pa je  $|AT| = |A'T|$ . Kako je  $\overline{AA_1}$  težišnica, slijedi  $|AT| = 2|A_1T|$ , a onda iz  $|A'T| = 2|A_1T|$  slijedi  $|A'A_1| = |A_1T|$ . Sada vidimo da točka  $A_1$  raspodjeljuje dužine  $\overline{BC}$  i  $\overline{A'T}$  pa je četverokut  $BA'CT$  paralelogram.

Iz  $TC \parallel BA'$  slijedi da je  $\overline{CC_1}$  srednjica trokuta  $ABD$  pa je  $|AD| = 2|AC|$ . Analogno, iz  $TB \parallel CA'$  slijedi da je  $\overline{BB_1}$  srednjica trokuta  $AEC$  pa je  $|AE| = 2|AB|$ .

Sada vidimo da homotetija s koeficijentom 2 i središtem  $A$  preslikava trokut  $ABC$  u trokut  $AED$ . Tom homotetijom središte  $O$  opisane kružnice trokuta  $ABC$  preslikava se u središte  $S$  kružnice opisane trokutu  $AED$ . Točka  $S$  nalazi se na polupravcu  $AO$  i vrijedi  $|AS| = 2|AO|$  pa je  $\overline{AS}$  promjer kružnice  $k$ . Time je tvrdnja dokazana.

#### Zadatak 4.

Neka su  $a$  i  $b$  relativno prosti prirodni brojevi različiti od 1. Definiran je niz

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_n = \frac{x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}{x_{n-1} + x_{n-2}} \quad \text{za } n \geq 3.$$

Dokaži da niti jedan član  $x_n$  ovog niza, osim prva dva, nije prirodni broj.

#### Rješenje.

Primijetimo da je  $x_n > 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Primijetimo i da su svi  $x_n$  racionalni brojevi pa možemo zapisati  $x_n = \frac{p_n}{q_n}$ , gdje su  $p_n$  i  $q_n$  prirodni brojevi i  $M(p_n, q_n) = 1$ .

Dokažimo prvo da su  $p_n$  i  $p_{n+1}$  relativno prosti za svaki  $n \in \mathbb{N}$ . To ćemo dokazati induktivno. Očito je  $M(p_1, p_2) = M(a, b) = 1$ , tj.  $p_1$  i  $p_2$  su relativno prosti. Pretpostavimo sad da je  $M(p_n, p_{n+1}) = 1$  za neki  $n$ . Tada je

$$x_{n+2} = \frac{\frac{p_n^2}{q_n^2} + \frac{p_{n+1}^2}{q_{n+1}^2}}{\frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}} = \frac{p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2}{q_n q_{n+1} (p_n q_{n+1} + p_{n+1} q_n)} = \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}.$$

Budući da je  $M(p_n, p_{n+1}) = 1$  po pretpostavci indukcije i  $M(p_{n+1}, q_{n+1}) = 1$ , zaključujemo da je  $M(p_{n+1}, p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2) = M(p_{n+1}, p_n^2 q_{n+1}^2) = 1$ , odakle slijedi  $M(p_{n+1}, p_{n+2}) = 1$ . Time smo dokazali našu tvrdnju.

Želimo dokazati da  $x_n$  nije prirodan broj za svaki  $n \geq 3$ .

Pretpostavimo suprotno, odnosno da je  $x_{n+2}$  prirodan broj za neki  $n \in \mathbb{N}$ . Budući da je

$$x_{n+2} = \frac{p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2}{q_n q_{n+1} (p_n q_{n+1} + p_{n+1} q_n)} = \frac{p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2}{p_n q_n q_{n+1}^2 + p_{n+1} q_{n+1} q_n^2},$$

zaključujemo da

$$q_{n+1} \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \implies q_{n+1} \mid p_{n+1}^2 q_n^2 \implies q_{n+1} \mid q_n^2$$

jer su  $p_{n+1}$  i  $q_{n+1}$  relativno prosti. Sada zbog  $q_{n+1} \mid q_n^2$  vrijedi

$$q_{n+1}^2 \mid p_n q_n q_{n+1}^2 + p_{n+1} q_{n+1} q_n^2 \implies q_{n+1}^2 \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \implies q_{n+1}^2 \mid q_n^2.$$

Analognim zaključivanjem dobijemo

$$q_n \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \implies q_n \mid p_n^2 q_{n+1}^2 \implies q_n \mid q_{n+1}^2,$$

a onda i

$$q_n^2 \mid p_n q_n q_{n+1}^2 + p_{n+1} q_{n+1} q_n^2 \implies q_n^2 \mid p_n^2 q_{n+1}^2 + p_{n+1}^2 q_n^2 \implies q_n^2 \mid q_{n+1}^2.$$

Kako  $q_{n+1}^2 \mid q_n^2$  i  $q_n^2 \mid q_{n+1}^2$ , zaključujemo da je  $q_n^2 = q_{n+1}^2$ , odnosno  $q_n = q_{n+1}$ , odakle je

$$x_{n+2} = \frac{p_n^2 + p_{n+1}^2}{q_n (p_n + p_{n+1})}.$$

Znači da

$$p_n + p_{n+1} \mid p_n^2 + p_{n+1}^2 \implies p_n + p_{n+1} \mid 2p_{n+1}^2$$

jer je

$$p_n^2 + p_{n+1}^2 = p_n^2 - p_{n+1}^2 + 2p_{n+1}^2 = (p_n - p_{n+1})(p_n + p_{n+1}) + 2p_{n+1}^2.$$

Neka je  $p$  prost broj takav da  $p \mid p_n + p_{n+1}$ , a time i  $p \mid 2p_{n+1}^2$ .

Ako je  $p \neq 2$  tada  $p \mid p_{n+1}^2 \implies p \mid p_{n+1}$ , a budući da  $p \mid p_n + p_{n+1}$ , znači da  $p \mid p_n$ , što je kontradikcija jer smo dokazali da su  $p_n$  i  $p_{n+1}$  relativno prosti.

Ako je  $p = 2$  jedini prosti faktor, onda je  $p_n + p_{n+1}$  potencija broja 2 koja je veća od 2 (jer su  $p_n$  i  $p_{n+1}$  veći od 1). Iz toga slijedi

$$4 \mid p_n + p_{n+1} \implies 4 \mid 2p_{n+1}^2 \implies 2 \mid p_{n+1}^2 \implies 2 \mid p_{n+1} \implies 2 \mid p_n,$$

što je opet kontradikcija jer je  $M(p_n, p_{n+1}) = 1$ .

Time smo dokazali da  $x_n$  nije prirodan broj za svaki  $n \geq 3$ .



## HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

drugi dan

10. travnja 2011.

1. Za prirodni broj  $d$  definiran je niz

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ako je } a_n \text{ paran,} \\ a_n + d, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za koje vrijednosti broja  $d$  postoji prirodni broj  $n$  za koji je  $a_n = 1$ ?

2. Dani su prirodni brojevi  $M$  i  $N$ . Promatramo  $N^2$  žarulja raspoređenih u tablicu s  $N$  redaka i  $N$  stupaca. Svaka žarulja može biti uključena ili isključena, a na početku su sve žarulje isključene.

Potez se sastoji od odabira bilo kojih  $M$  uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu te mijenjanja njihovog stanja, tako da svaka od odabranih  $M$  žarulja koja je prije bila isključena, nakon poteza bude uključena, i obratno.

Ako je konačnim brojem poteza moguće postići da sve žarulje budu uključene, dokaži da je broj  $M$  djelitelj broja  $N$ .

3. Na polukružnici s promjerom  $\overline{AB}$  dane su točke  $K$  i  $L$ . Simetrala dužine  $\overline{AB}$  siječe dužinu  $\overline{KL}$  u točki  $U$  i pritom su točke  $A$  i  $K$  s jedne strane te simetrale, a  $B$  i  $L$  s druge. Neka je  $N$  nožište okomice iz sjecišta pravaca  $AK$  i  $BL$  na pravac  $AB$ , a  $V$  točka na pravcu  $KL$  takva da je  $\sphericalangle VAU = \sphericalangle VBU$ .

Dokaži da su pravci  $NV$  i  $KL$  međusobno okomiti.

4. Odredi sve parove  $(x, y)$  cijelih brojeva za koje vrijedi

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

# HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

drugi dan

Rješenja zadataka

## Zadatak 1.

Za prirodni broj  $d$  definiran je niz

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ako je } a_n \text{ paran,} \\ a_n + d, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za koje vrijednosti broja  $d$  postoji prirodni broj  $n$  za koji je  $a_n = 1$ ?

### *Rješenje.*

Prvo uočimo da je za parne  $d$  dani niz oblika  $a_n = 1 + nd$ , tj. niz je rastući i članovi su neparni pa se nikad neće vratiti u 1.

Neka je  $d$  proizvoljni neparni broj. Indukcijom se lako pokaže da je  $a_n < d$  ako je  $a_n$  neparan te da je  $a_n < 2d$  ako je  $a_n$  paran. Prema tome, niz je ograničen pa je i periodičan.

Neka je  $r$  najmanji indeks takav da je  $a_r = a_s$  za neki  $s \neq r$ . Pretpostavimo  $r > 0$ .

Ako je  $a_r \leq d$ , to znači da je  $a_r$  (pa onda i  $a_s$ ) dobiven dijeljenjem prethodnog člana niza s 2, tj.  $a_r = a_{r-1}/2$ ,  $a_s = a_{s-1}/2$ , iz čega slijedi  $a_{r-1} = a_{s-1}$ , što je u kontradikciji s minimalnosti od  $r$ .

Ako je  $a_r > d$ , iz  $a_n \leq 2d$  slijedi da su  $a_r$  i  $a_s$  dobiveni dodavanjem  $d$  prethodnim članovima niza, iz čega slijedi da je  $a_{r-1} = a_{s-1}$ , što je opet u kontradikciji s izborom indeksa  $r$ .

Dakle,  $r = 0$  i  $a_s = a_0 = 1$  za neki  $s > 0$  za sve neparne  $d$ .

## Zadatak 2.

Dani su prirodni brojevi  $M$  i  $N$ . Promatramo  $N^2$  žarulja raspoređenih u tablicu s  $N$  redaka i  $N$  stupaca. Svaka žarulja može biti uključena ili isključena, a na početku su sve žarulje isključene.

Potez se sastoji od odabira bilo kojih  $M$  uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu te mijenjanja njihovog stanja, tako da svaka od odabranih  $M$  žarulja koja je prije bila isključena, nakon poteza bude uključena, i obratno.

Ako je konačnim brojem poteza moguće postići da sve žarulje budu uključene, dokaži da je broj  $M$  djelitelj broja  $N$ .

### Prvo rješenje.

Pretpostavimo da broj  $M$  nije djelitelj broja  $N$ . Obojimo polja te tablice crnom i bijelom bojom tako da crnom bojom obojamo glavnu dijagonalu i sve dijagonale koje su točno  $M$  polja udaljene od nje, te dijagonalu koja se nalazi neposredno iznad glavne dijagonale i sve dijagonale koje su za točno  $M$  polja udaljene od nje. Na slici je dan primjer bojanja za  $N = 15$ ,  $M = 9$ .

Formalno, polje  $(i, j)$  ( $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ ) je obojano crnom bojom ako i samo ako je  $i - j \equiv 0 \pmod{M}$  ili  $i - j \equiv 1 \pmod{M}$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
2	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
3	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
4	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
5	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
6	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
7	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
8	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
9	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
10	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
11	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
12	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
13	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
14	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
15	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

Označimo s  $X$  broj žarulja koje su u nekom trenutku uključene i nalaze se na crnom polju tablice. Na početku su sve žarulje isključene pa je  $X = 0$ . Pogledajmo što se događa s brojem  $X$  u svakom koraku. Odabirom  $M$  uzastopnih žarulja u nekom retku ili stupcu očito ćemo odabrati točno dvije žarulje koje se nalaze na crnom polju. Ako su obje odabrane žarulje prije tog poteza isključene  $X$  će se povećati za 2. Ako je jedna isključena, a druga uključena,  $X$  će ostati isti, a ako su obje žarulje uključene,  $X$  će se u tom potezu smanjiti za 2. Iz toga zaključujemo da je broj  $X$  paran nakon svakog poteza.

Tvrđnja zadatka će biti dokazana dokažemo li da je ukupan broj crnih polja u našem bojanju neparan jer će to značiti da nikako ne možemo postići da sve žarulje na crnim poljima budu uključene.

Podijelimo crna polja u dvije skupine: polja  $(i, j)$  za koja je  $i - j \equiv 0 \pmod{M}$  (ovakva crna polja zovimo crnim poljima prvog tipa) i polja za koja je  $i - j \equiv 1 \pmod{M}$  (ovakva crna polja zovimo crnim poljima drugog tipa). Broj crnih polja prvog tipa označimo s  $S_1$ , a broj crnih polja drugog tipa označimo s  $S_2$ .

$S_1$  možemo izraziti kao:

$$S_1 = N + 2 \cdot [(N - M) + (N - 2M) + \dots + (N - kM)],$$

pri čemu je  $k$  najveći prirodni broj za koji je  $N - kM \geq 0$ , drugim riječima,  $k = \lfloor \frac{N}{M} \rfloor$ . U ovoj sumi pribrojnik  $N$  predstavlja broj crnih polja na glavnoj dijagonali, a broj u zagradama predstavlja broj crnih polja prvog tipa iznad (odnosno ispod) glavne dijagonale. Dobivamo da je  $S_1 \equiv N \pmod{2}$ .

S druge strane, broj  $S_2$  je jednak:

$$S_2 = (N - 1) + [(N - M - 1) + \dots + (N - kM - 1)] \\ + [(N - M + 1) + \dots + (N - kM + 1)].$$

Pribrojnik  $(N - 1)$  predstavlja broj crnih polja na dijagonali koja se nalazi neposredno iznad glavne dijagonale, izraz u prvim uglatim zagradama predstavlja broj crnih polja drugog tipa iznad te dijagonale, dok izraz u drugim uglatim zagradama predstavlja broj crnih polja drugog tipa ispod te dijagonale. U prvim i drugim uglatim zagradama očito ima po  $k$  pribrojnika (iako zadnji pribrojnik u prvim uglatim zagradama može biti jednak nuli). Primijetimo da smo ovdje koristili činjenicu da broj  $M$  nije djelitelj broja  $N$ , jer bi u protivnome vrijedilo da je  $N = k \cdot M$  pa bi u prvim zagradama zadnji broj bio  $-1$  što znači da njega ne bismo smjeli napisati u tom zbroju.

Sada imamo:

$$S_2 = (N - 1) + [(N - M) + \dots + (N - kM)] - k + [(N - M) + \dots + (N - kM)] + k,$$

odnosno

$$S_2 = (N - 1) + 2 \cdot [(N - M) + \dots + (N - kM)].$$

Iz navedenog zaključujemo da je  $S_2 \equiv N - 1 \pmod{2}$ , pa za ukupan broj crnih polja vrijedi:

$$S = S_1 + S_2 \equiv N + (N - 1) = 2N - 1 \equiv 1 \pmod{2},$$

odnosno  $S$  je neparan, što je i trebalo dokazati.

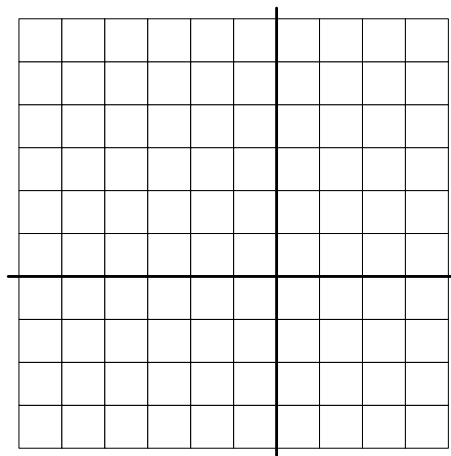
**Drugo rješenje.**

Obojimo žarulje u  $M$  boja (koje ćemo zvati  $0, 1, 2, \dots, M - 1$ ) tako da žarulju u  $i$ -tom retku i  $j$ -tom stupcu obojimo bojom  $i + j - 2 \pmod{M}$ . Na slici je primjer bojanja za  $N = 10$  i  $M = 6$ .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
2	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
3	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
4	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0
5	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1
6	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2
7	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3
8	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4
9	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
10	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0

Svakim potezom mijenjamo stanje točno jedne žarulje svake boje pa time i parnost broja žarulja u svakoj boji. Na početku su sve žarulje ugašene pa zaključujemo da je nakon svakog poteza parnost broja upaljenih žarulja svake boje jednaka. Ako je moguće postići da su sve žarulje upaljene, tada je parnost broja žarulja svake boje jednak.

Pretpostavimo da je  $M$  ne dijeli  $N$  te označimo  $N = Mk + r$ , pri čemu je  $1 \leq r \leq M - 1$ . Podijelimo ploču  $N \times N$  u četiri dijela dimenzija  $Mk \times Mk$ ,  $Mk \times r$ ,  $r \times Mk$  and  $r \times r$ , kao na slici.



Kako se svaki od dijelova dimenzija  $Mk \times Mk$ ,  $Mk \times r$  and  $r \times Mk$  može podijeliti na dijelove  $M \times 1$  ili  $1 \times M$ , vidimo da je broj žarulja svake boje u tim trima dijelovima jednak (i iznosi  $Mk^2 + 2kr$ ).

Promotrimo preostali dio ploče dimenzija  $r \times r$ . Broj žarulja boje  $r - 1$  iznosi  $r$  dok broj žarulja boje  $r$  iznosi  $r - 1$ . Zaista, žarulje boje  $r - 1$  se pojavljuju u svakom retku te ploče točno jednom, dok se žarulja boje  $r$  pojavljuje u svim redovima osim u prvom. Niti u jednom redu se ne nalaze dvije žarulje boje  $r$  jer je  $r < M$  pa svaki red ima sve žarulje različite boje. Slika pokazuje slučaj  $N = 10, M = 6$  i  $r = 4$ .

	1	2	3	4
1	0	1	2	3
2	1	2	3	4
3	2	3	4	5
4	3	4	5	0

Zaključujemo da broj žarulja boje  $r - 1$  i broj žarulja boje  $r$  na početnoj ploči nisu jednake parnosti pa se ne može postići da sve žarulje budu upaljene u istom trenutku.

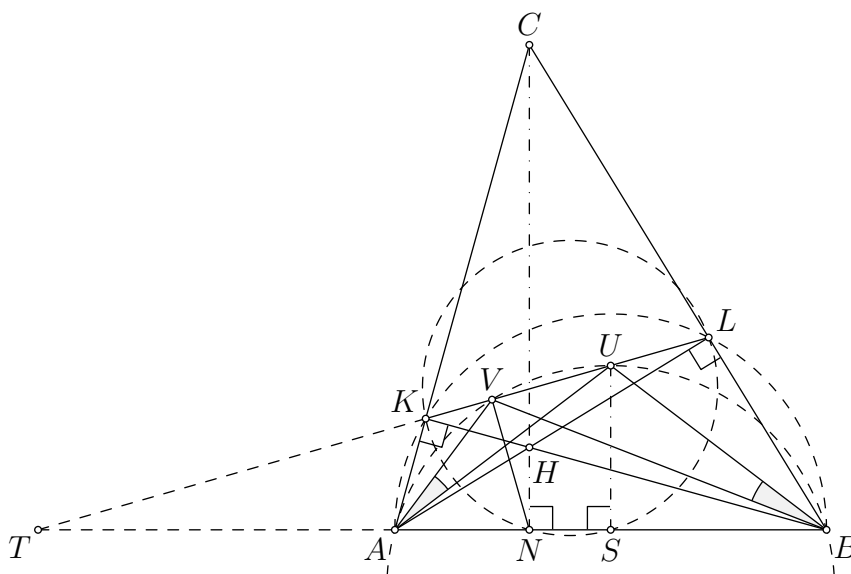
### Zadatak 3.

Na polukružnici s promjerom  $\overline{AB}$  dane su točke  $K$  i  $L$ . Simetrala dužine  $\overline{AB}$  siječe dužinu  $\overline{KL}$  u točki  $U$  i pritom su točke  $A$  i  $K$  s jedne strane te simetrale, a  $B$  i  $L$  s druge. Neka je  $N$  nožište okomice iz sjecišta pravaca  $AK$  i  $BL$  na pravac  $AB$ , a  $V$  točka na pravcu  $KL$  takva da je  $\sphericalangle VAU = \sphericalangle VBU$ .

Dokaži da su pravci  $NV$  i  $KL$  međusobno okomiti.

#### Prvo rješenje.

Neka je točka  $S$  središte dane polukružnice, točka  $C$  sjecište pravaca  $AK$  i  $BL$ , a točka  $T$  sjecište pravaca  $AB$  i  $KL$ .



Kako se dužina  $\overline{UV}$  iz točaka  $A$  i  $B$  vidi pod istim kutom, četverokut  $ABUV$  je tetivan pa potencija točke  $T$  daje

$$|TU| \cdot |TV| = |TA| \cdot |TB|.$$

Tetivan je i četverokut  $ABLK$  pa vrijedi

$$|TA| \cdot |TB| = |TK| \cdot |TL|.$$

Označimo sjecište dužina  $\overline{AL}$  i  $\overline{BK}$  s  $H$ . Uočimo da je to ortocentar trokuta  $ABC$  i da su četverokuti  $ANHK$  i  $BLHN$  tetivni. Kako je

$$\begin{aligned} \sphericalangle KNL &= \sphericalangle KNH + \sphericalangle HNL = \sphericalangle KAH + \sphericalangle HBL \\ &= \sphericalangle KAL + \sphericalangle KBL = 2\sphericalangle KAL = \sphericalangle KSL, \end{aligned}$$

četverokut  $NSLK$  je tetivan pa vrijedi

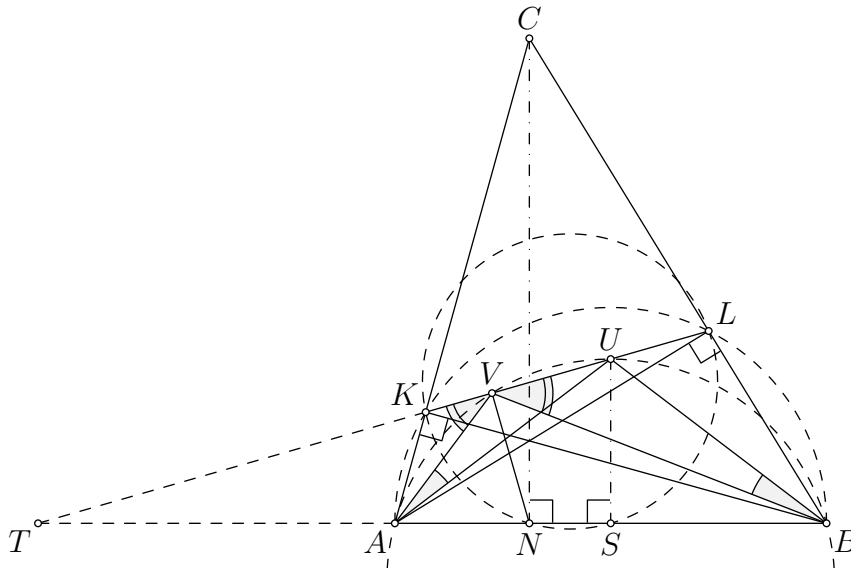
$$|TU| \cdot |TV| = |TA| \cdot |TB| = |TK| \cdot |TL| = |TS| \cdot |TN|.$$

Time je i četverokut  $NSUV$  tetivan, odakle je  $\sphericalangle NVU = 180^\circ - \sphericalangle NSU = 90^\circ$ .

**Napomena.**

Točke  $K$ ,  $L$  i  $N$  (nožišta visina trokuta  $ABC$ ) zajedno s točkom  $S$  (polovištem stranice  $\overline{AB}$ ) leže na tzv. Feuerbachovoj kružnici. Na istoj kružnici leže polovišta stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{CA}$ , kao i polovišta dužina  $\overline{AH}$ ,  $\overline{BH}$  i  $\overline{CH}$ , zbog čega se u literaturi često koristi i naziv *kružnica devet točaka*.

**Drugo rješenje.**



Uz oznake kao u prvom rješenju, vrijedi da je četverokut  $ABUV$  tetivan. Iskoristimo li i činjenicu da točka  $U$  leži na simetrali dužine  $\overline{AB}$ , zaključujemo

$$\sphericalangle KVA = 180^\circ - \sphericalangle AVU = \sphericalangle UBA = \sphericalangle BAU = \sphericalangle BVU,$$

što znači da je pravac  $KL$  vanjska simetrala kuta  $\sphericalangle AVB$ .

Kako vanjska simetrala  $KL$  kuta  $\sphericalangle AVB$  siječe pravac  $AB$  u točki  $T$ , vrijedi

$$\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{|AV|}{|BV|}. \quad (*)$$

Primijenimo Menelajev teorem na trokut  $ABC$  i pravac  $KL$ :

$$\frac{|AT|}{|BT|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CK|}{|AK|} = 1$$

i Cevin teorem na trokut  $ABC$  i njegov ortocentar u kojem se sijeku pravci  $AL$ ,  $BK$  i  $CN$ :

$$\frac{|AN|}{|BN|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CK|}{|AK|} = 1.$$

Iz toga slijedi  $\frac{|AT|}{|BT|} = \frac{|AN|}{|BN|}$  pa zbog (\*) dobivamo  $\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AV|}{|BV|}$ .

Time smo pokazali da je pravac  $VN$  simetrala kuta  $\sphericalangle AVB$  pa uz činjenicu da je pravac  $KL$  njegova vanjska simetrala slijedi tvrdnja zadatka.



### Varijacija drugog rješenja.

Alternativno, jednakost  $\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AV|}{|BV|}$  možemo dokazati trigonometrijom.

Neka je  $\alpha = \sphericalangle BAC$  i  $\beta = \sphericalangle CBA$ .

Promatrajući pravokutne trokute  $ANC$  i  $CNB$ , uz primjenu poučka o sinusima u trokutu  $ABC$ , dobijemo:

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|CA| \cos \alpha}{|BC| \cos \beta} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

Primjenom poučka o sinusima u trokutima  $AVK$  i  $VBL$  dobijemo:

$$\frac{|AV|}{|AK|} = \frac{\sin \sphericalangle AKV}{\sin \sphericalangle KVA}, \quad \frac{|BV|}{|BL|} = \frac{\sin \sphericalangle BLV}{\sin \sphericalangle BVU},$$

pa je

$$\frac{|AV|}{|BV|} = \frac{|AK| \cdot \frac{\sin \sphericalangle AKV}{\sin \sphericalangle KVA}}{|BL| \cdot \frac{\sin \sphericalangle BLV}{\sin \sphericalangle BVU}} = \frac{|AK|}{|BL|} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

jer je  $\sphericalangle KVA = \sphericalangle BVU$ ,  $\sphericalangle AKV = 180^\circ - \beta$  i  $\sphericalangle BLV = 180^\circ - \alpha$ .

Kako je  $|AK| = |AB| \cos \alpha$  i  $|BL| = |AB| \cos \beta$ , konačno je

$$\frac{|AV|}{|BV|} = \frac{|AK| \sin \beta}{|BL| \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta \sin \alpha} = \frac{|AN|}{|BN|}.$$

#### Zadatak 4.

Odredi sve parove  $(x, y)$  cijelih brojeva za koje vrijedi

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y.$$

#### Rješenje.

Ako je  $y = 0$  ili  $y = -1$ , desna strana dane jednadžbe je jednaka nuli pa je  $x^3 + x^2 + x = x(x^2 + x + 1) = 0$ , odakle slijedi da je  $x = 0$ . To nam daje dva rješenja:  $(0, 0)$  i  $(0, -1)$ .

Dokažimo da dana jednadžba nema drugih rješenja. Pretpostavimo da je  $y \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ . Tada je  $y^2 + y > 0$  pa je i  $x(x^2 + x + 1) > 0$ , iz čega slijedi da je  $x > 0$ .

Ako je par  $(x, y)$  rješenje dane jednadžbe, tada je par  $(x, -y - 1)$  također rješenje jer vrijedi  $y^2 + y = (-y - 1)^2 + (-y - 1)$ . Drugim riječima, ako jednadžba nema rješenja za  $y > 0$ , onda nema ni drugih rješenja. Stoga, možemo pretpostaviti da je  $y > 0$ .

Danu jednadžbu možemo ekvivalentno zapisati kao:

$$x^3 = (y - x)(x + y + 1). \quad (*)$$

Dokažimo da je  $M(y - x, x + y + 1) = 1$ . Pretpostavimo suprotno, neka je  $p$  neki zajednički prosti djeliteľ brojeva  $y - x$  i  $x + y + 1$ . Iz prethodne jednadžbe zaključujemo da  $p \mid x^3$  iz čega slijedi da  $p \mid x$ . Sada imamo:

$$p \mid y - x, \quad p \mid x + y + 1, \quad p \mid x \quad \implies \quad p \mid (x + y + 1) - (y - x) - 2x = 1,$$

što znači da nam je pretpostavka bila kriva i da su  $y - x$  i  $x + y + 1$  relativno prosti brojevi čiji je umnožak  $x^3$  pa je onda svaki od njih kub nekog cijelog broja. Nadalje,  $x^3 > 0$  i  $x + y + 1 > 0$  pa je i  $y - x > 0$ , što znači da su  $y - x$  i  $x + y + 1$  kubovi prirodnih brojeva. Označimo:

$$\begin{aligned} y - x &= a^3 \\ x + y + 1 &= b^3. \end{aligned}$$

Primijetimo da iz činjenice da je  $2x + 1 > 0$  slijedi da je  $y - x < x + y + 1$ , odnosno  $a < b$ , tj.  $b - a \geq 1$ .

Oduzimanjem prethodne dvije jednadžbe dobijemo  $2x + 1 = b^3 - a^3$ , a iz  $(*)$  slijedi da je  $x = ab$ . Dakle, vrijedi:

$$2ab + 1 = b^3 - a^3.$$

Sada imamo:

$$2ab + 1 = b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2) \geq a^2 + ab + b^2 \stackrel{A-G}{\geq} 3ab,$$

odnosno  $ab \leq 1$ , što očitó nije moguće jer su  $a$  i  $b$  različiti prirodni brojevi.

Stoga, jedina rješenja dane jednadžbe su parovi  $(0, 0)$  i  $(0, -1)$ .