ALGEBRA

1. Neka su $a, b, c > 0$. Dokaži da vrjedi: $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{2b+c} + \frac{c}{2c+a} \leq 1$.

2. Odredi sva rješenja sustava za realne $x, y, z > 0$:
$x + y + z = 2010$
$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{670}$

3. Odredi rješenja jednadžbe u skupu realnih brojeva: $(x+1)^5 + (x+1)^4(x-1) + (x+1)^3(x-1)^2 + (x+1)^2(x-1)^3 + (x+1)(x-1)^4 + (x-1)^5 = 0$.

4. Za pozitivne realne brojeve $a_1, a_2, ..., a_n$ odredi najmanju vrijednost izraza:
$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2)...(a_{n-1}+a_n)(a_n+2^{n+1})}$

5. Neka su $a, b, c \geq 1$ realni brojevi takvi da je $a + b + c = 2abc$. Dokaži da je
$(a+b+c)^{\frac{2}{3}} \geq (ab-1)^{\frac{1}{3}} + (bc-1)^{\frac{1}{3}} + (ca-1)^{\frac{1}{3}}$

6. Izračunaj: $1^5 + 2^5 + ... + 20^5$.

GEOMETRIJA

1. Dokaži da je $(\sin\frac{180°}{7})^{-1} = (\sin\frac{360°}{7})^{-1} + (\sin\frac{540°}{7})^{-1}$

2. Promatrajmo trokut XYZ i točku O u njegovoj unutrašnjosti. Neka su točke $A; B; C; D; E; F$ takve da je $A, B \in \overline{XY}, C, D \in \overline{YZ}, E, F \in \overline{ZX}$ te da pravci AD, BE, CF prolaze kroz točku O i paralelni su sa stranicama $\overline{ZX}, \overline{YZ}, \overline{XY}$ redom. Ako su duljine dužina $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}$ prirodni brojevi, dokaži da je njihov umnožak potpun kvadrat.

3. Dan je trapez $ABCD$ u ojemu je pravac BC paralelan s AD. Pretpostavimo da se simetrale kutova $\angle BAD$ i $\angle CDA$ sijeku na simetrali sdužine $\overline{BC}$. Dokaži da je tada $|AB| = |CD|$ ili $|AB| + |CD| = |AD|$.

4. Neka je ABC takav da je $|AB| = |AC|$. Neka su X i Y točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ takve da je $XY \| AB$. Označimo s D središte opisane kružnice trokuta CXY te neka je E polovište od $\overline{BY}$. Dokaži da je $\angle AED = 90°$.

5. Vlatko ima kutiju s n ne nužno jednakih šibica. Pomoću njih konstruira neki ciklični n-terokut. Vlatko zatim konstruira i druge ciklične n-terokute pomoću tih šibica. Dokaži da svi takvi n-terokuti imaju jednaku površinu.

6. (i) U kvadratu površine 1 nalazi se nekoliko mnogokuta čiji je zbroj površina veći od 1. Dokaži da postoji točka sadržana u bar dva mnogokuta.
(ii) Neka je S mnogokut (ne nužno konveksan) s površinom većom od n, gdje je n prirodan broj. Dokažite da je moguće translatirati S tako da pokriva bar $n + 1$ cjelobrojnu točku.

TEORIJA BROJEVA

1. Odredi prirodne a, b, c takve da su korjeni jednadžbi također prirodni:
$x^2 - 2ax + b = 0$
$x^2 - 2bx + c = 0$
$x^2 - 2cx + a = 0$.

2. Postoji li prirodan broj veći od 1 takav da je potencija broja 2 te da drugačijim razmještanjem njegovih znamenaka dobijemo potenciju broja 3?

3. Odredi sve proste brojeve p takve da su $2p+1$ i $4p+1$ prosti.

4. Odredi sve realne brojeve $0 < x, y < 1$ takve da su $x+3y$ i $y+3x$ cijeli brojevi.

5. Postoji li prirodan broj n takav da je suma njegovih djelitelja jednaka 2011?

6. Neka je $a \in \mathbb{N}$ takav da se broj $3a$ može prikazati u obliku x^2+2y^2. Dokažite da se tada i a može prikazati u tom obliku.

7. Dokažite da ne postoje cijeli brojevi x i y takvi da vrijedi

$$x^3+y^3=4(x^2y+xy^2+1)$$

8. Dokaži da jednadžba $x^3+y^3+z^3+w^3=2008$ ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja.

KOMBINATORIKA

1. beskonačan niz brojeva $0, 1, 2, 2, 1, -1...$ zadovoljava sljedeće svojstvo: iza bilo koja tri uzastopna broja a, b, c dolazi broj koji je jednak $c - min\{a, b\}$. Izračunaj stoti član niza.

2. Veronika i Borna igraju igru. Na početku je 2010 novčića naslagano na jednoj hrpi. Veronika, a zatim Borna, jedno za drugim naizmjenično rade sljedeći korak: odabiru jednu ili više hrpa novčića i dijele ju na dva manja dijala (nije dozvoljeno uzeti hrpu s jednim novčićem). Gubitnik je onaj tko više ne možže napraviti potez. Dokaži da Veronika ima pobjedničku strategiju.

3. U tvrtki je zaposleno 16 osoba, s time da svaka osoba podnosi točno 8 ostalih. Dokaži da postoje dvije osobe koje podnose jedna drugu.

4. Svi prirodni brojevi obojani su ili u zeleno ili u crveno tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:
(i) postoji beskonačno mnogo zelenih i beskonačno mnogo crvenih brojeva
(ii) suma svaka tri (ne nužno različita) crvena broja je crvena
(iii) suma svaka tri (ne nužno različita) zelena broja je zelena.
Nađi sva takva bojanja.

5. Vlatka nosi sve svoje ključeve na jednom velikom kolutu. Pomalo neobično, svi ključevi su potpuno jednaki i simetrični, ali svaki otvara druga vrata. Kako bi mogla zapamtiti koji ključ otvara koja vrata čak i nakon okretanja koluta i nekih ključeva na njemu, Vlatka je odlučila neke od ključeva obojati. U ovisnosti o broju ključeva odredite najmanji broj boja potrebnih da bi u svakom trenutku sa sigurnošću mogla raspoznavati ključeve.

6. Na ploči su napisani prirodni brojevi $1, 2, \ldots, 2011$. Dozvoljeno je odabrati nekoliko brojeva, zapisati na ploču ostatak koji daje njihov zbroj pri dijeljenju s 11, a zatim obrisati te brojeve. Nakon nekog broja koraka, na ploči ostanu samo dva broja, a jedan od njih je 1000. Koji je drugi?

7. Tvrtko ima špil od n karata, označenih brojevima $1, \ldots, n$. U svakom koraku, Tvrtko pogleda kartu koja se nalazi na vrhu špila. Ako je k broj kojim je označena ta karta, Tvrtko uzima gornjih k karata i okreće im poredak. Dokažite da će nakon konačnog broja koraka na vrh doći karta označena brojem 1.

8. Eva i Domagoj igraju sljedeću igru: na raspolaganju su 22 karte označene brojevima od 1 do 22. Eva izabere jednu od njih i položi je na stol. Domagoj zatim izabere i položi jednu od preostalih karata na stol uz kartu koju je Eva položila, tako da suma brojeva na te dvije karte bude kvadrat prirodnog broja. Eva zatim polaže jednu od preostalih karata na stol tako da suma brojeva na zadnje svije položene karte bude kvadrat prirodnog broja, itd. Igra zvršava kada su sve karte odigrane ili više nijedna karta ne može biti položena na stol. Pobjednik je onaj koji je zadnji položio kartu. Ima li Eva pobjedničku strategiju?

BOŽIĆNI ZADATAK

Neka je $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ *razlomljeni* dio broja x, npr. $\{1.23\} = 0.23$, $\{3\} = 0$, $\{-0.4\} = 0.6$. Neka je α iracionalan broj.

1. Neka je N prirodan broj. Promatrajte brojeve oblika $n\alpha$, gdje je $n = 1, 2, \ldots, N$. Dokažiite da postoje bar dva broja među njima čiji se razlomljeni dijelovi razlikuju za manje od $\frac{1}{N-1}$.

2. Neka je $a < b$. Dokažite da interval $\langle a, b \rangle$ sadržii bar jedan broj oblika $n\alpha + m$, za neke cijele brojeve m, n.

3. Dokažite da postoji prirodan broj N takav da broj 2000^N u dekadskom prikazu počinje nizom znamenaka 20112012.

4. Neka je $a < b$. Dokažiite da interval $\langle a, b \rangle$ sadrži beskonačno mnogo brojeva oblika $n\alpha + m$ (gdje su m i n cijeli brojevi).