1. Europski matematički kup

24. studenoga 2012. – 1. prosinca 2012.

Juniori

Zadatci i rješenja

1. zadatak

Zadan je trokut ABC i točka Q na simetrali kuta $\angle BAC$. Kružnica k_1 opisana trokutu BAQ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki $P \neq C$. Kružnica k_2 opisana je trokutu CQP. Radijus kružnice k_1 je veći od radijusa kružnice k_2. Kružnica sa središtem u Q i radijusom $|QA|$ siječe kružnicu k_1 u točkama A i A_1. Kružnica sa središtem u Q i radijusom $|QC|$ siječe kružnicu k_1 u točkama C_1 i C_2. Dokaži da je $\angle A_1BC_1 = \angle C_2PA$.

(Matija Bucić)

Rješenje.

U ovom zadatku mnogo puta iskoristit ćemo činjenicu da se nad tetivama jednakih duljina nalaze jednaki kutovi.

Iz uvjeta zadatka vrijedi da je $|QC_1| = |QC_2|$ i $|QA| = |QA_1|$. Također, kako Q leži na simetrali kuta $\angle CAB$, slijedi da je $\angle PAQ = \angle QAB \Rightarrow |QP| = |QB|$.

Točke A, P, C_1, Q, C_2, B i A_1 leže na kružnici k_1, stoga tu imamo mnogo jednakih kutova. Konkretno, imamo $\angle QBC_1 = \angle C_2PQ$ i $\angle BC_1Q = \angle QC_2P$. U trokutima BQC_1 i C_2QP sada imamo:

$$\angle BQC_1 = 180^\circ - \angle QBC_1 - \angle BC_1Q = 180^\circ - \angle C_2PQ - \angle QC_2P = \angle C_2QP.$$

Četverokuti BA_1C_1Q i C_2APQ su tetivni, pa vrijedi

$$\angle BA_1C_1 = 180^\circ - \angle BQC_1 = 180^\circ - \angle C_2QP = \angle C_2AP.$$

Nadalje, zbog jednakosti duljina tetiva $|QA| = |QA_1|$ i $|QP| = |QB|$ vrijede jednakosti kutova $\angle A_1BQ = \angle APQ$ i $\angle QA_1B = \angle QAP$. Zato u trokutima A_1BQ i PC_2A vrijedi

$$\angle A_1C_1B = \angle A_1QB = 180^\circ - \angle A_1BQ - \angle QA_1B = 180^\circ - \angle APQ - \angle QAP = \angle PQA = \angle PC_2A.$$

Konačno, u trokutima A_1BC_1 i C_2PA vrijedi

$$\angle A_1BC_1 = 180^\circ - \angle A_1C_1B - \angle BA_1C_1 = 180^\circ - \angle PC_2A - \angle C_2AP = \angle C_2PA,$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Zadatak se mogao i brže rješiti koristeći osnu simetriju u odnosu na pravac QS_1, gdje je S_1 središte k_1.

2. zadatak

Neka je S skup prirodnih brojeva takav da za svaka dva elementa a i b vrijedi $D(a,b) > 1$, a za svaka tri elementa tog skupa a, b i c vrijedi $D(a,b,c) = 1$. Je li moguće da S ima 2012 članova?

($D(x,y)$, odnosno $D(x,y,z)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva x, y, odnosno brojeva x, y, z.)

(Ognjen Stipetić)

Rješenje.

Uočavajući da postoje takvi skupovi S s manje članova (recimo, $\{6, 10, 15\}$ za skup od tri člana), naslućujemo da bi se na sličan način mogao konstruirati skup s proizvoljno mnogo članova.

Konstrukciju ćemo provesti na sljedeći način: neka su brojevi $a_1, a_2, \ldots a_{2012}$ na početku jednaki 1. Tada uzmimo $\frac{2012 \cdot 2011}{2}$ različitih prostih brojeva, te svaki par brojeva a_i, a_j (gdje $i \neq j$) pomnožimo jednim prostim brojem. (Primjerice, za skup od 4 člana možemo uzeti proste brojeve $2, 3, 5, 7, 11, 13$, pa bi skup S bio $\{2 \cdot 3 \cdot 5, 2 \cdot 7 \cdot 11, 3 \cdot 7 \cdot 13, 5 \cdot 11 \cdot 13\}$.

Kako smo baš svaki par brojeva pomnožili nekim prostim brojem, zadovoljen je uvjet $D(a,b) > 1$ za sve a, b. Također, kako smo svaki par pomnožili svojim prostim brojem, nikoja tri broja nemaju zajednički prosti faktor, pa je zadovoljeno $D(a,b,c) = 1$ za sve a, b, c.

3. zadatak

Postoje li realni brojevi x, y i z takvi da je

$$x^4+y^4+z^4=13,$$
$$x^3y^3z+y^3z^3x+z^3x^3y=6\sqrt{3},$$
$$x^3yz+y^3zx+z^3xy=5\sqrt{3}?$$

(Matko Ljulj)

Rješenje.

Pretpostavimo da takvi brojevi x, y, z postoje. Neka je $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$. Također, neka je $A = a + b + c$, $B = ab + bc + ca$, $C = abc$. Gornji sustav tada se može pisati i na sljedeći način:

$$a^2+b^2+c^2=13 \Rightarrow (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=13 \Rightarrow A^2-2B=13$$
$$xyz(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=6\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{C}B=6\sqrt{3}$$
$$xyz(x^2+y^2+z^2)=5\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{C}A=5\sqrt{3}.$$

Primijetimo da su brojevi a, b i c pozitivni realni (zbog njihove definicije su nenegativni; ako bi jedan od njih bio nula, onda bi tada njihov umnožak bio nula, što je nemoguće zbog $\sqrt{C}B = 6\sqrt{3}$).

Kad se rješimo člana $\sqrt{C}$ iz druge i treće jednadžbe dobivamo $5B = 6A$. Kada izrazimo B preko A i uvrstimo u prvu jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$A^2-\frac{12}{5}A-13=0.$$

čija su rješenja 5 i $-\frac{13}{5}$. Kako su a, b i c pozitivni realni, i zbroj im mora biti pozitivan realan broj. Zato je $A = 5 \Rightarrow B = 6 \Rightarrow C = 3$.

Prema A-G nejednakosti vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{ab+bc+ca}{3} &\geqslant \sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca} \\ \iff \frac{B}{3} &\geqslant \sqrt[3]{C^2} \\ \iff \frac{6}{3} &\geqslant \sqrt[3]{9} \ /^3 \\ \iff 8 &\geqslant 9. \end{aligned}$$

Dolazimo do kontradikcije, pa zaključujemo da takvi brojevi x, y, z ne postoje.

4. zadatak

Neka je k prirodan broj. Na Europskom šahovskom kupu sudjelovalo je nekoliko igrača. Svaka dva igrača su odigrala točno jednu partiju u kojoj je netko pobijedio (nije bilo remija). Ustanovljeno je da je za svakih k igrača bilo moguće naći igrača koji ih je sve pobijedio. Također je ustanovljeno da je broj igrača na turniru bio najmanji mogući za takav k. Je li moguće da su na svečanoj večeri svi igrači bili smješteni za okrugli stol tako da je svatko sjedio pored igrača kojeg je pobijedio i pored igrača od kojeg je izgubio?

(Matija Bucić)

Rješenje.

Odgovor je da je moguće.

Ovaj problem lako se može objasniti terminima iz teorije grafova, no kako je namijenjen mlađim učenicima, to ćemo pokušati izbjeći.

Uzmimo najveći podskup natjecatelja turnira koje možemo posjesti za stol na opisani način. Ako su svi sjeli za stol, gotovi smo. U suprotnom postoji osoba koja ne sjedi za stolom. Također, za stolom sjedi barem jedna osoba. Neka je to a.

Neka za tim stolom svakoj osobi s lijeve strane sjedi osoba od koje je izgubila, a s desne strane osoba koju je pobjedila.

Nazovimo s W skup svih osoba koje su pobjedile osobu a, a ne sjede za stolom. Slično, neka je L skup svih osoba koje su izgubile od osobe a i ne sjede za stolom.

Uzmimo bilo koju osobu p iz skupa W. Ako je osoba p izgubila od lijevog susjeda osobe a, tada osobu p možemo posjesti za stol između osobe a i njenog (starog) lijevog susjeda, što je u kontradikciji s time da za stolom sjedi najviše moguće natjecatelja. Dakle, p je pobjedio lijevog susjeda od a. Sličnim zaključivanjem, p je pobjedio i njegovog lijevog susjeda, itd. Dakle, p je pobjedio sve osobe za stolom.

Ako na isti način uzmemo bilo koju osobu q iz skupa L i gledamo desne susjede osobe A, zaključit ćemo da je q izgubio od svih osoba sa stola.

Sada pretpostavimo da je neka osoba r iz W izgubila od neke osobe s iz L. U tom slučaju, umjesto osobe A možemo za stol posjesti osobe s i r (tim redom), pa ćemo opet dobiti kontradikciju o maksimalnom broju osoba za stolom.

Iz zadnja tri paragrafa zaključujemo da su osobe u W pobjedile sve osobe za stolom i osobe iz L, te da su sve osobe iz L izgubile od osoba za stolom i osoba iz W.

Kako sve osobe ne sjede za stolom, tada je bar jedan od skupova W i L neprazan. Ako je W neprazan, promotrimo skup W kao nezavisan šahovski kup. Možemo zaključiti da za taj "podkup" vrijede svi uvjeti iz zadatka, a manji je kup od početnog kupa, čime smo dobili kontradikciju.

Također, ako je L neprazan, "podkup" sastavljen od igrača iz unije skupova W i osoba za stolom zadovoljava uvjete zadatka, a manji je od početnog kupa.

Time smo dobili da su skupovi W i L prazni, dakle sve osobe mogu sjesti za stol na opisani način.