1. Europski matematički kup

24. studenoga 2012. – 1. prosinca 2012.

Juniori

1. zadatak

Zadan je trokut ABC i točka Q na simetrali kuta $\angle BAC$. Kružnica k_1 opisana trokutu BAQ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki $P \neq C$. Kružnica k_2 opisana je trokutu CQP. Radijus kružnice k_1 je veći od radijusa kružnice k_2. Kružnica sa središtem u Q i radijusom $|QA|$ siječe kružnicu k_1 u točkama A i A_1. Kružnica sa središtem u Q i radijusom $|QC|$ siječe kružnicu k_1 u točkama C_1 i C_2. Dokaži da je $\angle A_1BC_1 = \angle C_2PA$.

(Matija Bucić)

2. zadatak

Neka je S skup prirodnih brojeva takav da za svaka dva elementa a i b vrijedi $D(a,b) > 1$, a za svaka tri elementa tog skupa a, b i c vrijedi $D(a,b,c) = 1$. Je li moguće da S ima 2012 članova?

($D(x,y)$, odnosno $D(x,y,z)$ označava najveći zajednički djelitelj brojeva x, y, odnosno brojeva x, y, z.)

(Ognjen Stipetić)

3. zadatak

Postoje li realni brojevi x, y i z takvi da je

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 + z^4 &= 13, \\ x^3y^3z + y^3z^3x + z^3x^3y &= 6\sqrt{3}, \\ x^3yz + y^3zx + z^3xy &= 5\sqrt{3}? \end{aligned}$$

(Matko Ljulj)

4. zadatak

Neka je k prirodan broj. Na Europskom šahovskom kupu sudjelovalo je nekoliko igrača. Svaka dva igrača su odigrala točno jednu partiju u kojoj je netko pobijedio (nije bilo remija). Ustanovljeno je da je za svakih k igrača bilo moguće naći igrača koji ih je sve pobijedio. Također je ustanovljeno da je broj igrača na turniru bio najmanji mogući za takav k. Je li moguće da su na svečanoj večeri svi igrači bili smješteni za okrugli stol tako da je svatko sjedio pored igrača kojeg je pobijedio i pored igrača od kojeg je izgubio?

(Matija Bucić)

Vrijeme pisanja je 240 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Kalkulatori ili bilo kakva druga pomagala osim ravnala i šestara nisu dozvoljena.