



1. EUROPSKI MATEMATIČKI KUP
24. studenoga 2012. – 1. prosinca 2012.
Seniori



1. zadatak

Nađi sve prirodne brojeve a , b , n i proste p koji zadovoljavaju jednadžbu

$$a^{2013} + b^{2013} = p^n.$$

(Matija Bucić)

2. zadatak

Zadan je šiljastokutan trokut ABC i njegov ortocentar H . Dužine \overline{AH} i \overline{CH} sijeku dužine \overline{BC} i \overline{AB} u točkama A_1 i C_1 redom. Neka je D sjecište dužina \overline{BH} i $\overline{A_1C_1}$, a P polovište dužine \overline{BH} . Neka je točka D' osnosimetrična slika točke D u odnosu na pravac AC . Dokaži da je četverokut $APCD'$ tetivan.

(Matko Ljulj)

3. zadatak

Dokaži da sljedeća nejednakost vrijedi za sve pozitivne realne brojeve a , b , c , d , e i f :

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{a+b+d}} + \sqrt[3]{\frac{def}{c+e+f}} < \sqrt[3]{(a+b+d)(c+e+f)}.$$

(Dimitar Trenevski)

4. zadatak

Olja zapiše n prirodnih brojeva a_1, a_2, \dots, a_n strogo manjih od p_n , gdje p_n označava n -ti prosti broj. Oleg može odabrati dva (ne nužno različita) broja x i y te jednoga od njih zamijeniti produktom xy . Ako se pojave dva jednaka broja Oleg pobjeđuje. Može li Oleg garantirati pobjedu?

(Matko Ljulj)

Vrijeme pisanja je 240 minuta.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Kalkulatori ili bilo kakva druga pomagala osim ravnala i šestara nisu dozvoljena.