MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Uvod u funkcijske jednadžbe

28. listopada 2017.

Funkcija

Za neprazne skupove A i B funkcija je uređena trojka (A, B, f) gdje je f pravilo pridruživanja takvo da za svaki $x \in A$ postoji jedinstveni $y \in B$ takav da je $y = f(x)$.
Skup A je domena, a B kodomena funkcije. Takvu funkciju simbolički zapisujemo $f\colon A \to B$.
Skup svih vrijednosti koje funkcija poprima zovemo slika funkcije. Važno je napomenuti za kodomena i slika funkcije nisu jedno te isto. Npr. za funkciju $f\colon R \to R$, $f(x) = x^2$, kodomena je $\mathbb{R}$, a slika funkcije $\mathbb{R}_0^+$. Međutim, uvijek je slika funkcije podskup kodomene.

Neka svojstva funkcija

PARNOST-NEPARNOST: Funkcija je parna akko vrijedi

$$f(x) = f(-x)$$

za sve x iz domene, a neparna akko vrijedi

$$-f(x) = f(-x)$$

za sve x iz domene.
MONOTONOST: Funkcija je monotona akko

$$x > y \implies f(x) \geqslant f(y)$$

za sve x i y iz domene (tada je rastuća) ili

$$x > y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

za sve x i y iz domene (tada je opadajuća).
NEPREKIDNOST: Funkcija je neprekidna ako graf te funkcije možemo nacrtati u koordinatnom sustavu bez dizanja olovke. Ovo je neformalna definicija, formalna koristi limese. **INJEKCIJA:** Funkcija je injekcija akko nikoje 2 vrijednosti fukcije nisu iste, formalnije,

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

.
SURJEKCIJA: Funkcija je surjekcija akko za svaki element y iz kodomene postoji x iz domene takav da je $y = f(x)$. Za takve funkcije je slika funkcije jednaka kodomeni.
BIJEKCIJA: Funkcija je bijekcija ako je surjekcija i injekcija, odnosno za svaki y iz kodomene postoji jedinstveni x iz kodomene takav da je $y = f(x)$.
KOMPOZIJA: Funkcija h je kompozicija funkcija f i g ako je

$$\begin{gathered} f\colon A \to B \\ g\colon C \to D \\ h\colon A \to D \\ \text{i} \\ h(x) = g(f(x)) \text{ za sve } x \in A \end{gathered}$$

INVERZNA FUNKCIJA: Ako za funkciju $f\colon A \to B$ postoji funkcija $g\colon B \to A$ takva da je

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

onda je g inverzna funkcija od f.
Za vježbu dokažite da funkcija ima inverz akko je bijekcija.

Funkcijske jednadžbe i metode rješavanja

Rješavanje funkcijskih jednadžbi je nalaženje svih funkcija koje zadovoljavaju zadane uvjete i dokazivanje da jedino te funkcije zadovoljavaju te uvjete.
Neke od metoda kojima se služimo u rješavanju su:

- pogađanje rješenja, ovo je vrlo bitno jer ako slutimo koje su funkcije rješenje, to nam može pomoći u rješavanju
- uvrštavanje konkretnih vrijednosti u jednadžbu, vrijednosti koje uvijek treba uvrstiti (ako je moguće) su 0,1,-1 jer su 0 i 1 neutralni elementi za zbrajanje i množenje, a s -1 možemo pokratiti neke stvari
- supstitucije i definiranje novih funkcija preko postojeće
- traženje surjektivnosti i injektivnosti
- traženje nultočaka i fiksnih točaka (fiksna točka je x takav da je $f(x) = x$)
- indukcija (korisna za traženje vrijednosti u cjelobrojnim i racionalnim točkama)

VAŽNO!!! Na kraju sva rješenja obavezno treba provjeriti jer smo rješavanjem jednadžbe dobili sljedeću implikaciju: ako je f rješenje jednadžbe, onda je f jedna od sljedećih funkcija: ..., pa moramo provjeriti rješenja za drugi smjer implikacije.

Primjer 1.
Nađi sve funkcije $f\colon R \to R$ za koje je

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z)$$

za sve $x, y, z \in R$.

Dokaz. Uvrštavanjem $y = 0$ i $z = 0$ dobivamo

$$f(0) = xf(x)$$

Sada početni uvjet zapravo postaje

$$f(xyz) = 3f(0)$$

ili, ako ovrstimo $y = z = 1$,

$$f(x) = 3f(0)$$

za sve $x \in R$, pa i za $x = 0$ što znači da je $f(0) = 3f(0) = 0$, odnosno $f(x) = 0$.
Provjera:

$$0 = f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z) = 0$$

znači, $f(x) = 0$ je rješenje jednadžbe.

Provjera je uvijek nužna jer sve informacije koje smo dobili zapravo znače: ako je funkcija rješenje, onda za nju vrijedi to što smo dobili.

Primjer 2.
Nađi sve funkcije $f\colon Q \to R$ za koje je

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

za sve $x, y \in Q$

Dokaz. Uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo

$$f(x) = f(x) + f(0) \implies f(0) = 0$$

Uvrštavanjem $y = -x$ dobivamo

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = f(x)$$

Neka je $f(1) = c$.
Vrijedi
$$f(nx) = f(x + x + \ldots + x) = f(x) + f(x) + \ldots + f(x) = nf(x)$$
za sve $n \in N$. Dakle, vrijedi i
$$f(\frac{n}{m}x) = \frac{f(nx)}{m} = \frac{n}{m}f(x)$$
za sve $n, m \in Q^+$.
To znači da je $f(q) = qf(1) = qc$ za sve $q \in Q$.
Lako se vidi da to zbilja je rješenje jednadžbe.

Ova jednadžba se zove **CAUCHYEVA FUNKCIJSKA JEDNADŽBA**. Ako je domena funkcije $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ ili sličan prebrojiv skup, onda je jedino rješenje $f(x) = cx$, za neku konstantu c. Ako je domena $\mathbb{R}$, onda uz $f(x) = cx$ postoje i druga "divlja" rješenja, međutim, ako još imamo i uvjet neprekidnosti ili monotonosti, onda je jedino rješenje linearna funkcija

Sad ćemo dokazati da, ako imamo uvjet monotonosti, da je jedino rješenje linearno.

Dokaz. Znamo da je $f(q) = cq$ za racionalne brojeve i želimo da je $f(x) = cx$ za sve realne brojeve.
Pretpostavimo da postoji $a \in R$ t.d. je $f(a) > ca$. Tada postoji racionalan broj q između $f(a)$ i ca pa vrijedi:
$$f(a) > f(q) = cq > ca$$
što je kontradikcija s monotonošću. Analagno se pokaže i da ne postoji $b \in R$ t.d. je $f(b) < cb$. Dakle, za sve x vrijedi $f(x) = cx$.
Lako se vidi da to zbilja je rješenje jednadžbe.

Primjer 3.
Postoji li $f \colon N \to N$ t.d. za svaki $n \in N$ vrijedi
$$f(f(n)) = f(n + 1) - f(n)?$$

Dokaz. Kako je domena $\mathbb{N}$, vrijedi
$$f(n + 1) - f(n) = f(f(n)) \geqslant 1$$
pa je funkcija strogo rastuća i lako se matematičkom indukcijom dokaže $f(n) \geqslant n$.
Međutim, vrijedi i
$$f(f(n)) = f(n + 1) - f(n) < f(n + 1) \implies f(n) < n + 1$$
zbog stroge rastućosti. Dakle, $f(n) = n$.
Provjera:
$$n = f(f(n)) = f(n + 1) - f(n) = 1$$
što ne vrijedi za $n > 1$. Dakle, ova jednadžba nema rješenja.

Primjer 4.
Postoji li surjekcija $f \colon N \to N$ t.d. za svaki $n \in N$ vrijedi $f(n) \geqslant n + (-1)^n$?

Dokaz. Primijetimo prvo da je $f(n) \geqslant n - 1$. (*)
To znači da ako je $f(a) = 1$ (mora postojati zbog surjektivnosti), onda je $a \leqslant 2$. Kako je $f(2) \geqslant 3$, mora biti $f(1) = 1$. Sad ćemo indukcijom po k dokazati da je $f(2k) = 2k + 1$ i $f(2k + 1) = 2k$ za svaki $k \in N$.

BAZA: $k = 1$
Neka je a takav da je $f(a) = 2$ (postoji zbog surjektivnosti). Mora biti $a \leqslant 3$ (*). Kako je $f(1) = 1$ i $f(2) \leqslant 3$, mora biti $a = 3$, tj. $f(3) = 2$.
Neka je b takav da je $f(b) = 3$ (postoji zbog surjektivnosti). Mora biti $a \leqslant 4$ (*). Kako je $f(1) = 1$, $f(3) = 2$ i $f(4) \leqslant 5$, mora biti $a = 2$, tj. $f(2) = 3$.
KORAK: Pretpostavljamo da je $f(1) = 1$ te $f(2i) = 2i + 1$ i $f(2i + 1) = 2i$ za sve $i \leqslant n - 1$. Dokazat ćemo $f(2n) = 2n + 1$ i $f(2n + 1) = 2n$.
Neka je a takav da je $f(a) = 2n$. Mora biti $a \geqslant 2n$ (pretpostavka) i $a \leqslant 2n + 1$ (*).Kako je $f(2n) \geqslant 2n + 1$, mora biti $f(2n + 1) = 2n$.
Neka je b takav da je $f(b) = 2n + 1$.Mora biti $a \geqslant 2n$ (pretpostavka) i $a \leqslant 2n + 2$ (*).Kako je $f(2n + 1) = 2n$ i $f(2n + 2) \geqslant 2n + 3$, mora biti $f(2n) = 2n + 1$.

Dakle, jedino rješenje jednadžbe je $f(1) = 1, f(2k) = 2k + 1, f(2k + 1) = 2k$ za sve $k \in N$. Kad ga uvrstimo u početni uvjet, dobijemo da zadovoljava uvjete zadatka.

Zadaci

Zadatak 1.
Nađi sve funkcije $f\colon Q \to Q$ t.d.
$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$
za sve $x, y \in R$.

Zadatak 2.
Nađi sve funkcije $f\colon R \to R$ t.d.
$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$
za sve $x, y \in R$.

Zadatak 3.
Nađi sve funkcije $f\colon R \to R$ t.d. $f(x)f(y) = f(x-y)$ za sve $x, y \in R$.

Zadatak 4.
Nađi sve funkcije $f\colon R \setminus \{0\} \to R$ t.d.
$$2f(x) + f(\frac{1}{x}) = x$$

Zadatak 5.
Nađi sve funkcije $f\colon [0,1] \to [0,1]$ takve da vrijedi $f(0) = 0$ i
$$|f(x) - f(y)| \geqslant |x-y|, x, y \in [0,1]$$

Zadatak 6.
Nađi sve strogo rastuće $f\colon R \to R$ takve da je $f(f(x)) = x$ za sve $x \in R$.

Zadatak 7.
Nađi sve $f\colon R^+ \to R^+$ takve da vrijedi
$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$
za sve $x, y \in R^+$.

Zadatak 8.
Nađi sve $f\colon R \to R$ takve da vrijedi
$$f(x) = \max_{y \in R}(2xy - f(y))$$
za sve $x \in R$.

Zadatak 9.
Nađi sve $f\colon R \to R$ takve da vrijedi
$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2$$
za sve $x, y \in R$.

Zadatak 10.
Nađi sve $f\colon Q \to Q$ takve da je
$$f(1) = 2$$
$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$
za sve $x, y \in Q$

Zadatak 11.
Nađi sve $f\colon R \to R$ takve da je
$$f(f(x) - f(y)) = (x-y)^2 f(x+y)$$
za sve $x, y \in R$.

Hintovi

1. Uvedi supstituciju $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$
2. Uvrsti $y = 0$ i $x = y$
3. Dokaži parnost.
4. Uvrsti $\frac{1}{x}$
5. Nađi $f(1)$.
6. Pretpostavi da za neki a, $f(a) > a$ ili $f(a) < a$.
7. Dobij multiplikativnost i nakon toga aditivnost.
8. Uvrsti $x = y$.
9. Uvrsti $x = 0$ i $y = f(y)$.
10. Dokaži $f(z) = z + 1$ za cijele brojeve.
11. Uvrsti $x = y$ i dokaži djelomičnu surjektivnost.

Rješenja

1. Kad napravimo supstituciju $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$, dobijemo $g(x+y) = g(x) + g(y)$ kojoj je jedino rješenje u $g(x) = cx$. Dakle jedino moguće rješenje je $f(x) = cx + \frac{x^2}{2}$ i lako se provjeri da je to stvarno rješenje polazne jednadžbe.

2. Kad uvrstimo $y = 0$ dobijemo $xf(0) = xf(x)f(0)$, odnosno $f(0) = f(x)f(0)$ za sve x koji nisu jednaki 0. Ako $f(0) \neq 0$, onda je $f(x) = 1$ za sve $x \neq 0$ i lako se provjeri da je to jedno rješenje. Ako je $f(0) = 0$, uvrstimo $x = y \neq 0$ i dobijemo $2xf(x) = 2xf(x)^2 \implies f(x) = 0, 1$ za sve $x \neq 0$. Ako postoje $a \neq 0, f(a) = 0$ i $b \neq 0, f(b) = 1$, uvrstimo $x = a, y = b$ i dobijemo $af(b) = 0$, kontradikcija. Dakle, jedina rješenja su $f(x) = 0$,$f(x) = 1$ za $x \neq 0$ i $f(0) = c$ gdje je c bilo koji realni broj. Lako se provjeri da su to rješenja.

3. Zamijenimo li x i y, dobijemo da je funkcija parna. Sad možemo umjesto y uvrstiti $-y$, dobijemo $f(x-y) = f(x+y)$ za sve $x, y \in R$, dakle, funkcija je konstantna. Provjerom se dobije da su jedine moguće konstante 0 i 1.

4. Uvrstimo li $\frac{1}{x}$ u jednadžbu, dobijemo $2f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x}$. Dakle, dobili smo sustav 2 jednadžbe s 2 nepoznanice s jednistvenim rješenjem $f(x) = \frac{2x - \frac{1}{x}}{3}$, $f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x} - x}{3}$. Dakle, jedino moguće rješenje je $f(x) = \frac{2x - \frac{1}{x}}{3}$. Provjerom se dobije da je to stvarno rješenje polazne jednadžbe.

5. Uvrstimo li $y = 0$, dobivamo
$$|f(x)| \geqslant |x| \implies f(x) \geqslant x$$
To znači da je
$$f(1) \geqslant 1 \implies f(1) = 1$$
Uvrstimo li sad $y = 1$, dobivamo
$$|1 - f(x)| \geqslant |1 - x| \implies f(x) \leqslant x$$
Kako imamo $f(x) \geqslant x$ i $f(x) \leqslant x$, jedino moguće rješenje je
$$f(x) = x$$
i lako se vidi da ono zadovoljava jedndžbu.

6. Pretpostavimo da je za neki a $f(a) > a$. Tada zbog rastućosti vrijedi
$$f(f(a)) > f(a) > a$$
što nije moguće. Slučaj $f(a) < a$ se rješava analogno.
Dakle, jedina mogućnost je $f(x) = x$ za sve $x \in R$ i lako se vidi da ono zadovoljava jedndžbu.

7. Jedna rješenja su $f(x) = 1$ i $f(x) = x$ za sve $x \in R^+$. Inače postoji a takav da je $f(a) \neq 1$. Sada vrijedi
$$f(a)^{f(xy)} = f(a^{xy}) = f(a^x)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)} \implies f(xy) = f(x)f(y)$$
jer $f(a) \neq 1$. Sada je
$$f(a)^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x)f(a^y) = f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)} \implies f(x+y) = f(x) + f(y)$$
jer $f(a) \neq 1$.
Iz jednadžbe $f(xy) = f(x)f(y)$ se dobije
$$f(x^2) = f(x)^2 \geqslant 0$$
dakle
$$f(x) \geqslant 0, x \geqslant 0$$
pa dobivamo
$$f(x+a) = f(x) + f(a) \geqslant f(x), a \geqslant 0$$
odnosno funkcija je rastuća. Dakle, dobili smo uvjet monotonosti na Cauchyevu funkcijsku pa je jedino rješenje $f(x) = cx, x \in R^+, c \in R^+$.
Provjera: $cx^y = cx^{cy} \implies c = 1$, dakle jedina su rješenja $f(x) = 1$ i $f(x) = x$.

8. Uvrstimo li $x = y$, dobivamo

$$f(x) \geqslant x^2$$

s druge strane za svaki x postoji neki a t.d.

$$f(x) = 2ax - f(a) \implies x^2 + a^2 \leqslant 2ax \implies a = x \implies f(x) = x^2, x \in R$$

Lako se vidi da je to zbilja rješenje jednadžbe.

9. Uvrstimo li $x = 0$, dobivamo

$$f(f(y)) = y, y \in R$$

Uvrstimo li sad $y = f(0)$, dobivamo

$$f(x^2) = f(0) - x^2$$

odnosno

$$f(x) = f(0) - x, x \geqslant 0$$

Sad možemo u početnu jednadžbu uvrstiti takav x da je $x^2 + f(y) > 0$ i onda imamo

$$y - x^2 = f(0) - x^2 - f(y) \implies f(x) = f(0) - x, x \in R$$

Lako se vidi da to stvarno jest rješenje jednadžbe.

10. Uvrstimo li $y = 1$, dobivamo

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

što znači da je

$$f(z) = z + 1$$

za sve cjelobrojne z i da je

$$f(x+z) = f(x) + z$$

za sve racionalne x i cijele z (ova zadnja tvrdnja se lako dokaže indukcijom). Ako sada uvrstimo $x = \frac{p}{q}$ i $y = q$, gdje su p i q cjelobrojni, dobivamo

$$p + 1 = f(p) = (q+1)f(\frac{p}{q}) - f(\frac{p}{q}) - q + 1 = qf(\frac{p}{q}) - q + 1 \implies f(\frac{p}{q}) = \frac{p+q}{q} \implies f(x) = x + 1$$

za sve racionalne x. Lako se vidi da je to stvarno rješenje jednadžbe.

11. Jedno rješenje je $f(x) = 0$ za sve x. Pretpostavimo sad da postoji a takav da $f(a) \neq 0$. Pretpostavimo da je $f(a) > 0$, drugi slučaj se rješava analogno.
Uvrstimo li $x = y$, dobivamo $f(0) = 0$. Uvrstimo li sad x i y takve da je $x + y = a$ i $x - y = k$, gdje je k bilo koji broj, dobivamo da funkcija može postići sve nenegativne vrijednosti.
Uvrstimo li zamijenjene x i y u jednadžbu, dobivamo

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(y) - f(x)) \implies f(z) = f(-z)$$

za sve z zbog djelomične surjektivnosti.
Sad uvrstimo $y = -y$ i dobivamo

$$f(f(x) - f(y)) = (x-y)^2 f(x+y) = (x+y)^2 f(x-y) \implies \frac{f(z)}{z^2} = c$$

Dakle jedino moguće rješenje je $f(x) = cx^2$.
Provjera:

$$c^3(x^2 - y^2)^2 = c(x-y)^2(x+y)^2 \implies c = 1$$

U drugom slučaju se dobije $c = -1$. Dakle, jedina su rješenja $f(x) = 0$, $f(x) = x^2$, $f(x) = -x^2$.