

Simulacija općinskog natjecanja

10.1.2016.

Umjesto klasičnog predavanja, dajemo vam zadatke za samostalno rješavanje kao vježbu i pripremu za nadolazeće općinsko natjecanje. Zato pokušajte ove zadatke riješiti unutar 180 minuta (koliko je predviđeno na natjecanju) i to bez ikakvih pomoćnih materijala. Rješenja ćemo objaviti idući tjedan. Sretno s rješavanjem!

Zadatak 1.

Neka je $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, gdje su a, b, c realni brojevi različiti od nule. Dokažite da tada vrijedi:

$$a^2b^2c^2 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

Zadatak 2.

U paralelogramu $ABCD$ simetrala kuta $\sphericalangle DAB$ raspolavlja dužinu \overline{CD} . Ako sa M označimo polovište dužine \overline{CD} , odredite veličinu kuta $\sphericalangle AMB$.

Zadatak 3.

Nađite sve prirodne brojeve a, b , $a < b$, takve da za sve realne brojeve $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b].$$

Zadatak 4.

Nađite:

- (a) neki prirodan broj $n > 1$ koji je barem 2016 puta veći od svakog od svojih prostih faktora,
- (b) najmanji prirodan broj s tim svojstvom.

Zadatak 5.

Svaki od n kuhara zna dio nekog recepta za kolač (i svi znaju različite dijelove recepta, a zajedno znaju čitav recept). Dopušteno im je razmjenjivanje svih informacija koje znaju preko telefona, ali tako da u jednom telefonskom razgovoru sudjeluju točno dva kuhara i tijekom tog razgovora točno jedan od njih govori. Odredite najmanji broj telefonskih poziva potrebnih da bi svi kuhari znali čitav recept.