Simulacija županijskog natjecanja

Rješenja zadataka

21.2.2016.

Zadatak 1.
Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c \leqslant 3$. Odredite najmanju moguću vrijednost izraza

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)}.$$

Rješenje.
Vrijedi:

$$\frac{a+1}{a(a+2)}=\frac{1}{2} \frac{a+a+2}{a(a+2)}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2(a+2)},$$

i potpuno analogno,

$$\frac{b+1}{b(b+2)}=\frac{1}{2b}+\frac{1}{2(b+2)}, \quad \frac{c+1}{c(c+2)}=\frac{1}{2c}+\frac{1}{2(c+2)}.$$

Primjenom AH nejednakosti i uvjeta zadatka dobivamo

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} \overset{AH}{\geqslant} \frac{9}{2(a+b+c)} \geqslant \frac{9}{2 \cdot 3}=\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2(a+2)}+\frac{1}{2(b+2)}+\frac{1}{2(c+2)} \overset{AH}{\geqslant} \frac{9}{2(a+b+c)+12} \geqslant \frac{9}{2 \cdot 3+12}=\frac{1}{2}.$$

Zbrajanjem dobivenih nejednakosti i korištenjem gornjih identiteta slijedi

$$\frac{a+1}{a(a+2)}+\frac{b+1}{b(b+2)}+\frac{c+1}{c(c+2)} \geqslant \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2.$$

Uočimo da ovo uistinu jest najmanja moguća vrijednost zadanog izraza: naime, jednakost se postiže kada se postižu jednakosti u AH nejednakostima i u uvjetu zadatka, a to je u slučaju $a=b=c$ i $a+b+c=3$. Dakle, jednakost se postiže za $a=b=c=1$.

Zadatak 2.
Odredite sve prirodne brojeve n takve da za četiri najmanja djelitelja d_1, d_2, d_3, d_4 od n vrijedi

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=n.$$

Rješenje.
Očito je $d_1=1$. Pretpostavimo da je n neparan. Tada u zadanoj jednakosti na lijevoj strani imamo zbroj četiri neparna broja (dakle, paran broj), a na desnoj neparan broj. Kontradikcija. Zato je n paran, pa je $d_2=2$. Pretpostavimo da je $d_3=4$. Tada je $n \equiv 0 \pmod 4$ i

$$d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2 \equiv 1+d_4^2 \pmod 4,$$

pa slijedi $d_4^2 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$. No, kvadrat prirodnog broja može davati samo ostatke 0 i 1 pri dijeljenju s 4. Zato $d_3 \neq 4$. Potpuno analogno dobijemo i $d_4 \neq 4$.
Iz prethodnog razmatranja zaključujemo kako d_3 mora biti jednak nekom (neparnom) prostom broju p (u suprotnom bi, zbog $d_3 \neq 4$, slijedilo da d_3 ima prost djelitelj veći od 2 pa d_3 ne bi bio treći najmanji djelitelj od n). Sada imamo

$$n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2=5+p^2+d_4^2,$$

a budući da je n paran i p neparan, slijedi da d_4 mora biti paran, tj. $d_4 = 2k$. Uočimo da k ima sve proste faktore veće ili jednake p (u suprotnom p ne bi bio treći najmanji djelitelj od n). Pretpostavimo da k ima prost djelitelj q koji je strogo veći od p (uočimo da q mora biti neparan). Tada je q djelitelj od n koji je manji od $2k$, pa bi četvrti najmanji djelitelj od n bio neparan. Kontradikcija, dakle, p je jedini prost djelitelj od k. Budući da je d_4 četvrti najmanji djelitelj od n, slijedi $d_4 = 2p$.
Dakle, imamo $n = 5 + p^2 + 4p^2 = 5(p^2 + 1)$. Budući da p dijeli n i p ne dijeli $p^2 + 1$, vidimo da p mora dijeliti 5. Dakle, $p = 5$ i $n = 5 \cdot (25 + 1) = 130$ je jedini broj s traženim svojstvom.

Zadatak 3.
Za okruglim stolom sjedi 10 učenika. Svaki od učenika zamisli jedan broj i taj broj priopći samo svojim susjedima (učenicima koji sjede lijevo i desno od njega) tako da ga pritom drugi učenici ne čuju. Nakon toga, idući u krug, svaki učenik javno kaže aritmetičku sredinu dva broja koja je saznao od svojih susjeda. Ako su redom izrečeni brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, koji je broj zamislio učenik koji je javno rekao broj 6?
Napomena. Aritmetička sredina dva realna broja jest jednaka zbroju tih brojeva podijeljenim s 2.

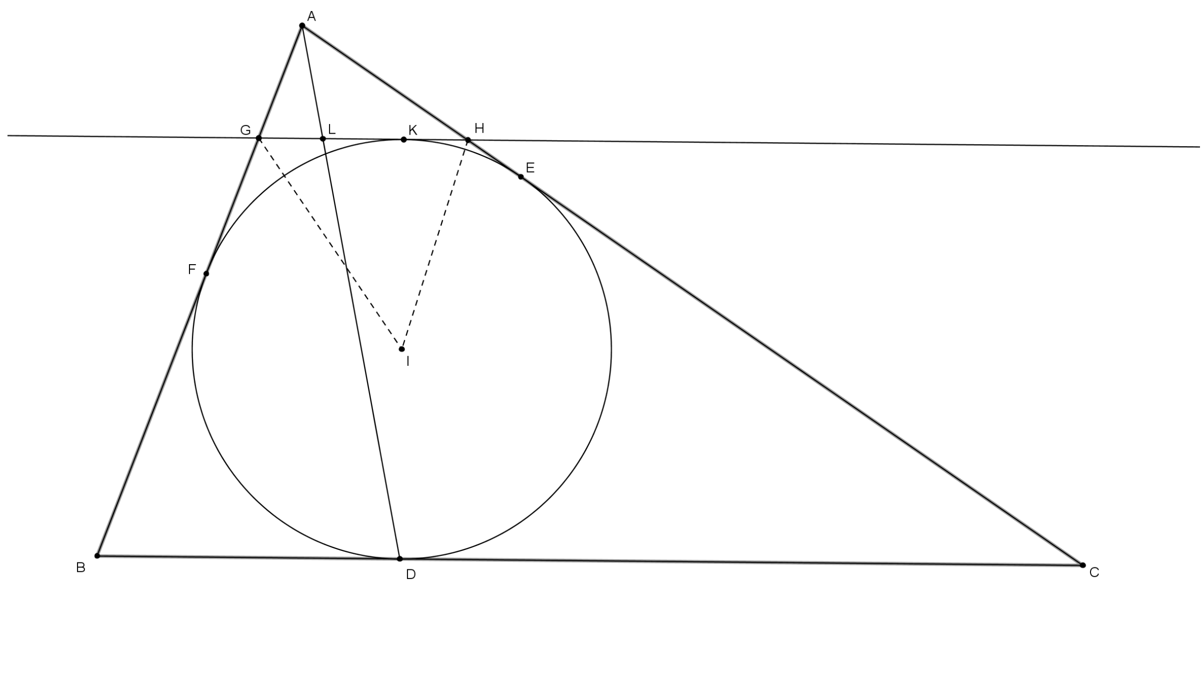
Rješenje.
Zbroj brojeva koje neki učenik sazna dvaput je veći od broja koji učenik javno izgovori. Zato je učenik koji je javno izgovorio broj 5 saznao brojeve čiji je zbroj jednak 10. Uočimo da su, prema uvjetu zadatka, njegovi susjedi javno rekli brojeve 4 i 6.
Dakle, ako je učenik koji je javno izgovorio broj 6 zamislio broj x, onda je učenik koji je javno izgovorio broj 4 zamislio broj $10 - x$.
Promatrajmo sada učenika koji je javno izgovorio broj 3. Taj je učenik saznao dva broja čiji je zbroj jednak 6, a jedan od tih brojeva jednak je $10 - x$ (od učenika koji je javno izgovorio broj 4). Zato je drugi broj, koji je saznao od učenika koji je javno izgovorio broj 2, jednak $x - 4$.
Analogno, učenik koji je javno izgovorio broj 8 morao je zamisliti broj $12 + x$. No, učenik koji je javno izgovorio broj 7 saznao je dva broja čiji je zbroj jednak 14, pa imamo jednadžbu

$$x + (12 + x) = 14.$$

Zato je $x = 1$, tj. učenik koji je javno izgovorio broj 6 zamislio je broj 1.

Zadatak 4.
Upisana kružnica trokuta ABC dira stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Neka su točke G i H, tim redom, na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ takve da su pravci GH i BC paralelni te da je pravac GH tangenta na upisanu kružnicu. Neka je točka K dilalište upisane kružnice i pravca GH, a točka L sjecište pravaca AD i GH. Dokažite da vrijedi $|GK| = |HL|$.

Rješenje.



Označimo stranice trokuta ABC standardno sa a, b, c te sa s njegov poluopseg. Neka je I središte upisane kružnice tog trokuta i neka su E, F, tim redom, dirališta upisane kružnice i stranica $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$.
Budući da je $BC \parallel GH$, trokuti ABC i AGH su slični (to su trokuti s jednakim kutovima), a potpuno analogno slijedi i da su trokuti ALH i ADC slični.
Budući da su odsječci tangenti iz neke točke na kružnicu međusobno jednake duljine, vrijedi $|CD| = |CE|$, $|AE| = |AF|$, $|BF| = |BD|$. Odavde dobivamo $|CD| = s - c$, a zbog prethodno dokazanih sličnosti slijedi $|LH| = s' - c'$ (gdje smo sa s', a', b', c' redom označili poluopseg i duljine stranica trokuta ALH).
No, budući da su točke K i F dirališta tangenti na upisanu kružnicu iz točke G, imamo $|GF| = |GK|$, a analogno dobivamo $|HK| = |HE|$. Sada slijedi

$$\begin{aligned}
2|AF| &= |AF| + |AE| \\
&= |AG| + |GF| + |HE| + |AH| \\
&= |AG| + |GK| + |HK| + |AH| \\
&= |AG| + |GH| + |AH| \\
&= 2s'.
\end{aligned}$$

Dakle, $|AF| = s'$ pa

$$|GK| = |GF| = s' - c = |HL|,$$

što je i trebalo pokazati.

Zadatak 5.
U tablici dimenzija $2n \times 2n$ upisani su prirodni brojevi od 1 do 10, pri čemu su brojevi u poljima sa zajedničkim vrhom relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji se u tablici pojavljuje barem $\frac{2n^2}{3}$ puta.

Rješenje.
Podijelimo tablicu na n^2 kvadrata dimenzija 2×2 i uočimo da svaki od ovih kvadrata može sadržavati najviše 2 elementa skupa $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$: naime, svaki je od brojeva u tom skupu djeljiv s 2 ili 3, pa među svaka tri broja iz tog skupa možemo uvijek naći dva koja imaju zajednički djelitelj. Zato se tri broja iz tog skupa ne mogu naći u 2×2 kvadrata u kojemu sva četiri polja imaju jedan zajednički vrh.
Dakle, svaki od tih kvadrata sadrži barem dva elementa skupa $\{1, 5, 7\}$. Budući da takvih kvadrata ima n^2, u čitavoj se tablici članovi skupa $\{1, 5, 7\}$ pojavljuju barem $2n^2$ puta. Sada prema Dirichletovom principu zaključujemo kako će se jedan broj iz tog skupa u tablici pojaviti barem $\frac{2n^2}{3}$ puta.