MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Simulacija državnog natjecanja

Rješenja zadataka

27.3.2016.

Zadatak 1.
Neka su a, b, c različiti cijeli brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$4(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant (a + b + c)^2 + 8.$$

Rješenje.
Budući da je nejednakost simetrična (tj. ne mijenja se zamjenom uloga a, b, c), bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $a > b > c$. Zapišimo nejednakost u ekvivalentnom obliku

$$4(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac) \geqslant 8$$

$$\iff a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geqslant 8.$$

a, b, c su različiti cijeli brojevi pa vrijedi $a \geqslant b + 1 \geqslant c + 2$. Zato imamo:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \geqslant 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6.$$

Također, očito vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2$$

jer su brojevi a, b, c različiti (najviše jedan od njih jednak je nuli, a iduća najmanja moguća vrijednost njihovih kvadrata 1, i to u slučaju kada je jedan od tih brojeva jednak 1, a drugi -1). Zbrajanjem dobivenih nejednakosti dobivamo traženu. Jednakost se postiže za $(a, b, c) \in \{(1, 0, -1), (1, -1, 0), (0, 1, -1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

Zadatak 2.
Neka su a, b, c, d prirodni brojevi takvi da je $ab - cd$ djeljiv s $a + b + c + d$. Dokažite da je broj $a + b + c + d$ složen.

Rješenje.
Vrijedi $a + b + c + d \geqslant 4$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je broj $p = a + b + c + d$ prost. Budući da p dijeli broj $ab - cd$, on dijeli i broj

$$ab - cd + dp = ab + ad + bd + d^2 = (a + d)(b + d).$$

Kako je p, prema pretpostavci, prost, a $a + d$ i $b + d$ su prirodni brojevi, on dijeli barem jedan od tih brojeva pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $p \mid a + d$. Odavde slijedi

$$a + d \geq p = a + b + c + d \implies b + c \leqslant 0,$$

što ne može vrijediti jer su b i c prirodni brojevi.

Zadatak 3.
Andrea i Branimir igraju igru. Andrea ima n kamenčića u šeširu i na početku nekoliko (moguće i nula) kamenčića stavi iz šešira u šaku. U svakom potezu Andrea ili vrati jedan kamenčić u šešir, ili stavi još jedan kamenčić iz šešira u šaku. Branimir zna broj n i nakon svakog Andreinog poteza pogađa koliko je kamenčića u šeširu. Ako pogodi, on pobjeđuje i igra završava. Može li Branimir sigurno pobijediti?

Rješenje.
Postoji pobjednička strategija za Branimira. Branimir u prvih $n+1$ poteza kaže redom brojeve $0, \ldots, n$. Ako je n neparan, Branimir sada u jednom potezu kaže bilo koji broj, a zatim ponovi prvih $n+1$ poteza, tj. opet redom kaže brojeve $0, \ldots, n$. Ukoliko je n paran, Branimir odmah ponovi $n + 1$ poteza (bez međukoraka između).

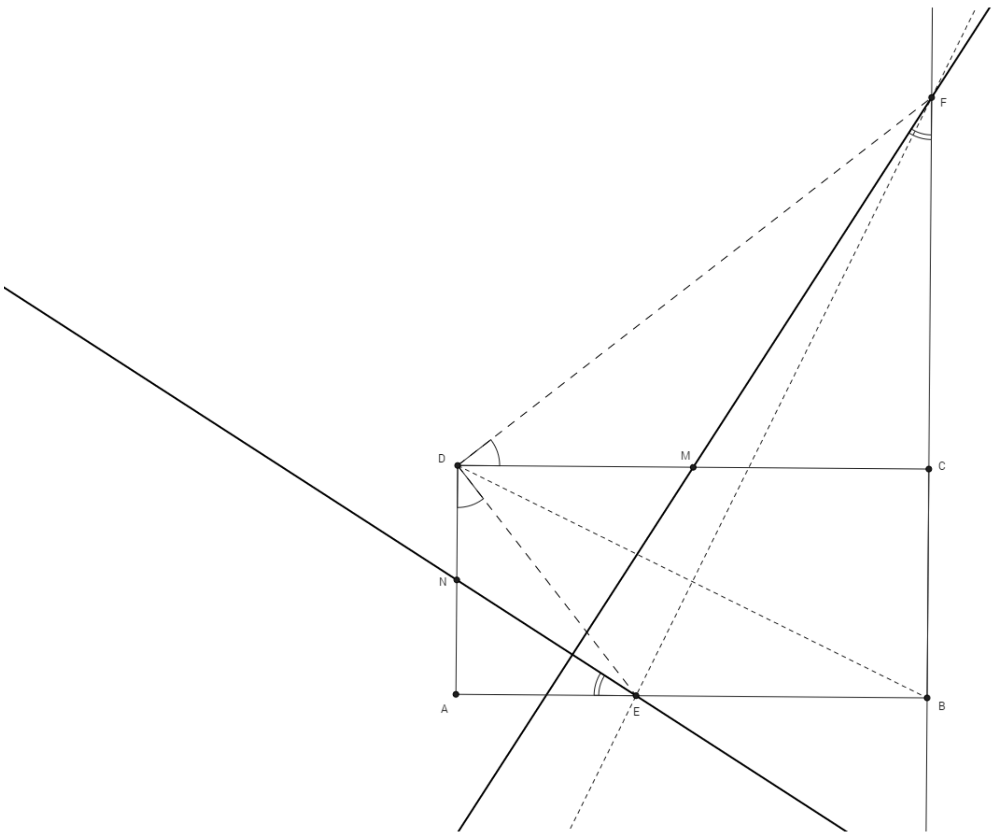
Pretpostavimo da Branimir ovom strategijom ne pobjeđuje. Promatrajmo samo prvih $n+1$ poteza. Primijetimo da se parnost broja kamenčića u Andreinom šeširu u svakom potezu mijenja, kao i parnost Branimirovog broja.

Zamislimo Branimira i Andreu (tj. brojeve koje Branimir izgovara i brojeve kamenčića u Andreinom šeširu) na brojevnom pravcu. Na početku je u šeširu x kamenčića i Andrea je na koordinati x. Andrea se svakim potezom pomiče lijevo ili desno za 1. Branimir govori redom brojeve $0, \ldots, n$ i na početku je u točki 0, tj. lijevo od Andree, a na kraju je u točki n, tj. desno od Andree. Budući da Branimir nije pobijedio, morao je nekako "preskočiti" Andreu, tj. u nekom trenutku su Branimirove i Andreine pozicije bile m i $m+1$, a zatim su zamijenili mjesta. Parnosti Branimirove i Andreine pozicije u tom su trenutku različite, a mijenjaju se svakim potezom, pa su i na početku bile različite, tj. x je paran (jer se Andrea prvo pomakla na $x-1$ ili $x+1$, a 0 u ovom kontekstu možemo shvatiti kao paran broj).

Kada Branimir počne ponavljati ovaj proces, do tog je trenutka prošlo neparno mnogo poteza od početka igre jer je u slučaju kada je $n+1$ paran "pričekao" jedan potez. U tom trenutku, netom prije početka ponavljanja procesa, Andreina pozicija na pravcu je neparna i Branimir će ovaj put "uhvatiti" Andreu, tj. pogoditi broj kamenčića u šeširu, budući da će se Andrea najprije pomaknuti na parnu poziciju, a 0 je također paran broj.

Zadatak 4.
Zadan je pravokutnik $ABCD$. Simetrala dužine $\overline{BD}$ siječe pravce AB i BC redom u točkama E i F. Neka su M i N polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$. Dokažite da su pravci FM i EN okomiti.

Rješenje.



Trokuti BEF i DEF su sukladni jer je EF simetrala dužine $\overline{BE}$ pa vrijedi $|BE| = |DE|$ i $|BF| = |DF|$. Iz toga slijedi $DE \perp DF$. Zbog okomitih krakova je $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CDF$, pa su trokuti ADE i CDF slični. Zato je

$$\frac{|AE|}{|CF|} = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|AN|}{|CM|},$$

pa su po SKS poučku i trokuti ANE i CMF slični, odakle slijedi da je $\sphericalangle CFM = \sphericalangle AEN$. Vrijedi $CF \perp AE$, pa zbog jednakosti kutova vrijedi i $EN \perp FM$.

Zadatak 5.
U ravnini je dano n kružnica radijusa 1 tako da se nikoje dvije ne sijeku (kružnice se mogu dodirivati). Dokažite da je kružnice moguće obojiti u 4 boje tako da se nijedan par kružnica iste boje ne dodiruje.

Rješenje.
Postavimo Kartezijev koordinatni sustav i poredajmo kružnice u rastućem poretku po x-koordinati njihovih središta. Postavimo osi tako da nikoje dvije kružnice nemaju istu x-koordinatu središta. Određujemo boju svake pojedine kružnice redoslijedom koji je dan upravo ovim poretkom.

Pretpostavimo da neka kružnica sa središtem S u trenutku kada joj određujemo boju dodiruje 4 kružnice kojima smo već odredili boju, a imaju središta A, B, C i D, te neka su y-koordinate y_A, y_B, y_C, y_D tih središta u poretku $y_A < y_B < y_C < y_D$. Ako se kružnica sa središtem A i kružnica sa središtem B dodiruju, vrijedi $\sphericalangle ASB = 60^\circ$ jer je trokut ASB jednakostraničan, inače je taj kut veći. Analogno dobivamo:

$$\sphericalangle ASD = \sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD \geqslant 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom da točke A i D imaju manju x-koordinatu od točke S (naime, ako za x-koordinate x_A, x_D, x_S točaka A, D, S vrijedi $x_A < x_S$ i $x_D < x_S$, onda točke A i B leže u istoj poluravnini određenoj pravcem $x = x_S$ pa za kut $\sphericalangle ASD$ vrijedi $\sphericalangle ASD < 180^\circ$).

Zato svaka kružnica u trenutku kada joj određujemo boju dodiruje najviše 3 kružnice kojima smo već odredili boju, pa postoji boja kojom je možemo obojiti tako da ne dodiruje nijednu kružnicu kojoj smo dotad odredili istu tu boju.

Kada odredimo boju svim kružnicama, nikoje dvije kružnice iste boje neće se dodirivati.