Simulacija državnog natjecanja

mnm mnm

April 2017

1 1. razred

1. Nađi sve četvorke nenegativnih cijelih brojeva (a, b, c, d) za koje vrijedi: $4^a + 5^b + 6^c = 7^d$.
2. Neka je P točka unutar kvadrata $ABCD$ takva da vrijedi: $|PA| : |PB| : |PC| = 1 : 2 : 3$. Koliko iznosi mjera kuta $\angle BCA$?
3. U trapezu $ABCD$ $(BC||AD)$, $\angle BCD = 72°$, $|AD| = |BD| = |CD|$. Neka je K točka na BD takva da je $|AK| = |AL|$, te neka je M polovište dužine $\overline{CD}$. Ako je N sjecište AM i BD, dokaži da je $|BK| = |ND|$.
4. Dokaži nejednakost $\frac{1}{1999} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{1997}{1998} < \frac{1}{44}$.

2 2. razred

1. Neka su x i y prirodni brojevi veći od 1 takvi da je $x^2 + xy - y$ potpun kvadrat. Dokaži da je $x + y + 1$ složen broj.
2. Za skup točaka u ravnini kažemo da je Pitagorejski ako za svako bojanje tog skupa u dvije boje postoje tri točke iste boje koje su vrhovi pravokutnog trkuta. Odredi jesu li kružnica i jednakostraničan trokut pitagorejski skupovi.
3. Neka je $ABCD$ četverokut takav da vrijedi: $\angle CAB = \angle CDA$ i $\angle BCA = \angle ACD$. Neka je M polovište dužine $\overline{AB}$. Dokaži: $\angle BCM = \angle DBA$
4. Za proizvoljnih n realinih brojeva $x_1, x_2, ..., x_n \in [0, 1]$ pokaži da vrijedi: $(x_1 + x_2 + ... + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)$.

3 3. razred

1. Neka je $x_1, x_2, x_3, ...$ niz rekurzivno zadan sa: $x_1 = 4; x_{n+1} = x_1x_2...x_n + 5$. Nađi sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je x_ax_b potpun kvadrat.
2. Na sjednici UN-a se nalazi $15n$ ljudi i govori se 5 jezika. Za svaki par jezika $6n$ ljudi govori oba jezika, a za svaku trojku $3n$. Dokaži da se svake dvije osobe na sjednici mogu razumjeti i da postoji jezik kojim govori barem $10n$ ljudi.
3. Neka je P sjecište dijagonala konveksnog četverokuta $ABCD$ u kojem vrijedi: $AC + AD = BC + BD$. Dokaži da simetrale kutova $\angle ACB, \angle ADB$ i $\angle APB$ prolate istom točkom.
4. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi: $ab + bc + ca = 1$. Dokaži da vrijedi nejednakost:
$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{a} + 6\sqrt{3}b} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{b} + 6\sqrt{3}c} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}}{c} + 6\sqrt{3}a} \leq \frac{1}{abc}$$

4 4. razred

1. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju:

$$f(f(x) + f(y)) + f(f(x)) = 2f(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

2. Nađi sve prirodne brojeve b veće od 6 takve da je $\overline{5654_b}$ potencija prostog broja.

3. Neka je k opisana kružnica trokutu $\triangle ABC$. Okomica iz C na AB siječe AB u D i k u E, a simetrala unutarnjeg kuta $\angle BCA$ siječe AB u F i k u G. Pravci GD i HF redom sijeku kružnicu k u H i I. Dokaži: $|AI| = |BE|$.

4. Za prirodan broj n sa $\tau(n)$ definiramo broj prirodnih djelitelja od n, a sa $\phi(n)$ definiramo broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji su relativno prosti s n. Nađi sve prirodne brojeve s točno dva prosta djelitelja koji zadovoljavaju jednadžbu: $\tau(\phi(n)) = \phi(\tau(n))$.