Međunarodni matematički Turnir gradova
Juniori, O-dio, proljeće 2011.
1. i 2. razredi

5. ožujka 2011.

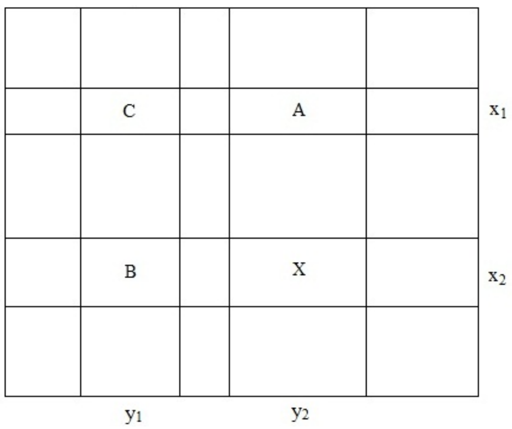
Zadatci

1. Brojevi $1, 2, \ldots, 2010$ raspoređeni su u krug u nekom redoslijedu. Ako bismo između susjednih brojeva postavili znakove nejednakosti, pojavljivali bi se naizmjence $>$ i $<$. Dokaži da je razlika nekih dvaju susjednih brojeva paran broj. (*3 boda*)

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je razlika svaka dva susjedna broja neparan broj. To znači da su svaka dva susjedna broja različite parnosti, odnosno da je svaki broj okružen s dva broja različite parnosti.
Također, kako se između brojeva naizmjence pojavljuju znakovi $>$ i $<$, zaključujemo da jedan broj može biti ili veći od ili manji od oba susjedna broja.
Promatramo li broj 1, znamo da se oko njega nalaze dva parna broja, a kako je 1 najmanji od ponuđenih brojeva, 1 je manji i od svojih sljedbenika. Zbog naizmjeničnog pojavljivanja znakova $>$ i $<$ i zbog naizmjeničnog poretka brojeva po parnosti (neparan-paran-neparan-paran-...), zaključujemo da je svaki neparan broj okružen dvama parnim brojevima većih od njega i da je svaki paran broj okružen dvama neparnim brojevima manjih od njega.
Promatramo li broj 2, trebali bi naći dva neparna broja manja od njega koja bi bili njemu susjedni brojevi. Takve brojeve očito nije moguće pronaći. Kontradikcija!
Pretpostavka je bila pogrešna, dakle barem jedna razlika dva susjedna broja je neparna.

2. Pravkutnik je podijeljen na 121 pravokutno polje tako da je opseg 111 polja cijeli broj. Dokaži da je i opseg preostalih deset polja cijeli broj. (*4 boda*)

Rješenje. Uočimo da je $121 = 10 \cdot 11 + 1$, što znači da po Dirichletovom principu postoji barem jedan redak koji se sastoji od pravokutnika za koje sigurno znamo da imaju cjelobrojne opsege. Analogno, postoji i barem jedan stupac sa pravokutnicima cjelobrojnih opsega.
Promatramo li navedeni redak, zaključujemo da se svaki od 11 pravokutnika tog retka pojavljuje u svakom od 11 stupaca mreže. Iz toga slijedi da svaki stupac mreže sadrži barem jedan pravokutnik cjelobrojnog opsega (i to je onaj iz retka koji se sastoji od 11 pravokutnika cjelobrojnih opsega). Analogno zaključujemo i da svaki redak sadrži barem jedan pravokutnik cjelobrojnog opsega.
Odaberimo proizvoljan pravokutnik od preostalih 10 i označimo njegov opseg s X. Želimo dokazati da je X cijeli broj.
Prema prethodnim razmatranjima, postoji barem jedan pravokutnik cjelobrojnog opsega iz istog stupca; označimo njegov opseg s A. Također, postoji barem jedan pravokutnik cjelobrojnog opsega iz istog retka; neka je njegov opseg B.



Iz skice zaključujemo da je sjecište retka u kojem se nalazi pravokutnik s opsegom A i stupca u kojem se nalazi pravokutnik s opsegom B pravokutnik za koji također znamo da ima cjelobrojni opseg (jer se nalazi i u retku i u stupcu sa svim pravokutnicima cjelobrojnih opsega). Označimo njegov opseg s C.
Ako stranice pravokutnika označimo s x_1, x_2, y_1 i y_2 kao i na slici, dobivamo sljedeće relacije:
$X = 2(x_2 + y_2)$
$A = 2(x_1 + y_2)$
$B = 2(x_2 + y_1)$
$C = 2(x_1 + y_1)$
Sada možemo izvesti relaciju: $X = A + B - C$
Kako su A, B i C cijeli brojevi, X je također cijeli broj. Time je tvrdnja dokazana.

3. Duljina odraslog crva je 1 metar. Ako je crv odrastao, moguće ga je prerezati na dva dijela (bilo kojeg omjera duljina). Tako od jednog nastaju dva crva koji odmah počinju rasti brzinom od jednog metra po satu. Kada crv naraste do 1 metra duljine, prestaje rasti (i smatra se odraslim). Je li moguće od jednog odraslog crva dobiti 10 njih u manje od sat vremena? (*5 bodova*)

Rješenje. Takvu situaciju moguće je postići. Na početku prerežimo odraslog crva tako da je jedan novonastali crv velik $1/3600\ m$, a drugi $3599/3600\ m$. S obzirom na to da rastu brzinom od $1\ m/h = 1/3600\ m/s$, manjem crvu će trebati još 3599 sekundi = 59 minuta i 59 sekundi da postane odrasli crv. Drugome će, pak, trebati samo 1 sekunda.

Nakon jedne sekunde veći crv će dostići duljinu od 1 metra. Njega prerežimo tako da imamo crve veličine $1/1800\ m$ i $1799/1800\ m$. Sada imamo dva manja crva koji će postati odrasli za 59 minuta i 58 sekundi te jednog velikog koji će postati odrasli crv za 2 sekunde.

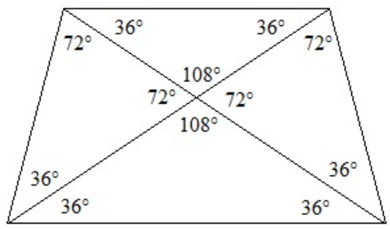
Ponovimo ovaj korak još 8 puta tako da odraslog crva prerežemo na način da jedan crv bude onoliko dug koliko su dugački preostali crvi koji još rastu. Tada ćemo u svakom koraku dobivati po jednog crva više i taj isti crv će u nekom trenutku unutar jednog sata (u ovom slučaju, 59 minuta i 59 sekundi nakon početka) postati odrasli crv (što se i traži u zadatku). Pokažimo još da je moguće postići takvo rezanje u manje od sat vremena.

1. rezanje napravili smo na samom početku. 2. rezanje napravili smo sekundu poslije. 3. rezanje obavljamo 1+2=3 sekunde nakon početka, itd. Posljednje, 10. rezanje, napravit ćemo $1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^9 = 2^{10} - 1 = 1023$ sekunde nakon početka. 1023 sekunde $= 17 \cdot 60 + 3$ sekunde $= 17$ minuta i 3 sekunde.

Dakle, posljednje rezanje bit će izvršeno unutar 1 sata, što znači da ćemo unutar jednog sata dobiti 10 odraslih crva.

4. Dan je konveksni četverokut. Svaka dijagonala dijeli ga na dva jednakokračna trokuta. Dvije dijagonale dijele ga na četiri jednakokračna trokuta. Je li taj četverokut nužno kvadrat? (*5 bodova*)

Rješenje. Četverokut ne mora nužno biti kvadrat. Jedan od protuprimjera je trapez na sljedećoj slici.



5. Patuljci su zatočili viteza koji je zmaju oteo princezu. Ipak, prije izručenja zmaju, odlučili su vitezu dati priliku za spas: dobio je 100 različitih novčića od kojih je 50 magičnih (samo patuljci znaju koji su to). Svakog dana vitez razdvaja novčiće na dvije (ne nužno jednako velike) hrpice. Ako one sadrže jednak broj magičnih novčića ili jednak broj običnih novčića, patuljci će osloboditi viteza. Može li vitez biti siguran da će izići na slobodu ako je do izručenja ostalo:

1. 50 dana (*2 boda*)
2. 25 dana (*3 boda*)

Rješenje. Vitez se sa sigurnošću može osloboditi u roku 25 dana. Na početku treba postaviti jednu hrpu s 51 novčićem i jednu s 49 novčića. Ako obje hrpe ne sadrže jednak broj magičnih ni običnih novčića, tada je sigurno da jedna hrpa ima više magičnih novčića od druge i manje običnih novčića od druge, i obrnuto (inače bi jedna hrpa morala imati barem $26 + 26 = 52$ novčića, a to nije moguće).

Svaki sljedeći dan vitez mora prebacivati po jedan novčić iz manje hrpe u veću. Na kraju 25. dana, veća hrpa će imati $51 + 24 = 75$, a manja $49 - 24 = 25$ novčića. Tada je sigurno da veća hrpa ima više i magičnih i običnih novčića (inače bi mogla sadržavati najviše $50 + 24 = 74$ novčića, a to nije moguće).

Kako je veća hrpa na početku imala manje novčića određenog tipa (magičnih ili običnih) od druge hrpe, a na kraju 25. dana ih ima više od druge, a svaki dan smo prebacivali po 1 novčić, zaključujemo da su sigurno u nekom od tih 25 dana obje hrpe imale jednak broj novčića traženog tipa. To znači da će vitez biti pušten na slobodu točno taj dan.

Ukupan rezultat računa se na temelju tri najbolje riješena zadatka.
Bodovi pojedinih dijelova istog zadatka se zbrajaju.