Zadatci i rješenja

1. zadatak
Nađi sve prirodne brojeve a, b, n i proste p koji zadovoljavaju jednadžbu

$$a^{2013} + b^{2013} = p^n.$$

(Matija Bucić)

Prvo rješenje.
Uvedimo supstitucije $d = D(a,b), x = \frac{a}{d}, y = \frac{b}{d}$. Sada smo dobili jednakost

$$d^{2013}(a^{2013} + b^{2013}) = p^n.$$

Jasno da je d potencija broja p, recimo $d = p^k, k \in \mathbb{N}_0$. Jednakost sada možemo podijeliti sa p^{2013k}. Uvedimo još supstitucije $m = n - 2013k, A = x^{671}, B = y^{671}$. Tada jednakost postaje

$$A^3 + B^3 = p^m,$$

odnosno, kad se faktorizira

$$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = p^m.$$

(Iz definicije, A i B su relativno prosti.)
Pogledajmo sada što ako su te zagrade jednake 1. Situacija $A + B = 1$ je nemoguća jer su A i B prirodni brojevi. Ako je druga zagrada jednaka 1: $A^2 - AB + B^2 = 1 \Leftrightarrow (A-B)^2 + AB = 1 \Leftrightarrow A = B = 1$, pa dobivamo rješenje $a = b = 2^k, n = 2013k + 1, p = 2, \forall k \in \mathbb{N}_0$.
Ako su obje zagrade veće od 1 tada vrijedi

$$\begin{aligned} p &\mid A + B \\ p &\mid A^2 - AB + B^2 = (A+B)^2 - 3AB \\ \implies p &\mid 3AB. \end{aligned}$$

Ako $p \mid AB$, tada u kombinaciji s $p \mid A + B$ dobijemo $p \mid A$ i $p \mid B$, što je u kontradikciji s time da su A i B relativno prosti. Dakle, $p \mid 3 \implies p = 3$.
Ostala su nam još dva slučaja:

- Prvi slučaj: $A^2 - AB + B^2 = 3 \Leftrightarrow (A-B)^2 + AB = 3$ – jedina moguća rješenja u prirodnim brojevima su $A = 2, B = 1$ i $A = 1, B = 2$, no to nije rješenje početne jednadžbe jer $2 = x^{671}$ nema rješenja u prirodnim brojevima.
- Drugi slučaj: $3^2 \mid A^2 - AB + B^2$ – tada vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} 3 \mid A + B &\implies 3^2 \mid (A+B)^2 \\ 3^2 \mid A^2 - AB + B^2 &= (A+B)^2 - 3AB \\ &\implies 3^2 \mid 3AB \\ &\implies 3 \mid AB. \end{aligned}$$

  No, već smo prije komentirali da $p \nmid AB \implies$ u ovom slučaju nema rješenja.

Dakle, sva rješenja početne jednadžbe dana su sa

$$a = b = 2^k, n = 2013k + 1, p = 2, \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Drugo rješenje.
Kao i u prvom rješenju, izvadimo najveći zajednički djelitelj brojeva a i b (koji mora biti oblika p^k). Faktorizirajući dobivenu jednakost dobivamo

$$(x+y)(x^{2012}-x^{2011}y+x^{2010}y^2-\cdots-xy^{2011}+y^{2012})=p^m.$$

(Uveli smo sve iste supstitucije kao u prvom rješenju.) Označimo desnu zagradu sa A. Kako su x i y prirodni, vrijedi $x+y>1 \implies p \mid x+y$. Vrijedi $p \nmid x$ i $p \nmid y$ (jer su x i y relativno prosti). Sada možemo primijeniti LTE (Lifting the exponent lemma):

$$\nu_p(x^{2013}+y^{2013})=\nu_p(x+y)+\nu_p(2013)$$

Znamo da je $\nu_p(2013)=0$ za sve proste p različite od $3, 11, 61$, a u ostalim slučajevima je $\nu_p(2013)=1$. Primijetimo da je $A=1$ za $(x,y)=(1,1)$ i $A>61$ za $(x,y)\neq(1,1)$. Uistinu, za $(x,y)\neq(1,1)$ (BSO $x\geqslant y$), A možemo zapisati kao

$$x^{2011}(x-y)+x^{2009}y^2(x-y)+\cdots+xy^{2010}(x-y)+y^{2012}, \tag{1}$$

što je sigurno veće od 61 u slučajevima $x>y$ i $y\neq 1$.

- Ako je $\nu_p(2013)=1 \implies \nu_p(A)=1 \implies A\in\{3,11,61\}$, što je nemoguće.
- Ako je $\nu_p(2013)=0 \implies \nu_p(A)=0 \implies A=1 \implies (x,y)=(1,1)$, pa dobivamo rješenje

$$a=b=2^k, n=2013k+1, p=2, \forall k\in\mathbb{N}_0.$$

2. zadatak

Zadan je šiljastokutan trokut ABC i njegov ortocentar H. Dužine $\overline{AH}$ i $\overline{CH}$ sijeku dužine $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ u točkama A_1 i C_1 redom. Neka je D sjecište dužina $\overline{BH}$ i $\overline{A_1C_1}$, a P polovište dužine $\overline{BH}$. Neka je točka D' osnosimetrična slika točke D u odnosu na pravac AC. Dokaži da je četverokut $APCD'$ tetivan.

(Matko Ljulj)

Prvo rješenje.
Dokazat ćemo da je točka D ortocentar trokuta APC. Iz toga će slijediti tvrdnja zadatka zato što je tada

$$\begin{aligned}\angle AD'C=\angle ADC=180^\circ-\angle DAC-\angle DCA&=(90^\circ-\angle DAC)+(90^\circ-\angle DCA)=\\&=\angle PCA+\angle PAC=180^\circ-\angle APC.\end{aligned}$$

Primijetimo da je četverokut BA_1HC_1 tetivan. Pravci BA_1 i C_1H sijeku se u C, pravci BC_1 i A_1H sijeku se u A, pravci BH i C_1A_1 sijeku se u D, a točka P središte je opisane kružnice četverokutu BA_1HC_1. Zato je prema Brocardovom teoremu točka D ortocentar trokuta APC, što je trebalo dokazati.

Drugo rješenje.
Sa B_1 označimo nožište visine iz vrha B. Koristeći tetivne četverokute $B_1C_1PA_1$ (Feuerbachova kružnica), HA_1CB_1, AC_1A_1C i C_1HB_1A dobivamo sljedeće jednakosti kutova:

$$\angle A_1PB_1=\angle DC_1B_1$$
$$\angle A_1B_1P=\angle A_1CC_1=\angle A_1AC_1=\angle DB_1C_1.$$

Iz ovih dviju jednakosti slijedi da su trokuti B_1PA_1 i B_1C_1D slični, iz čega slijedi

$$\frac{|B_1D|}{|B_1A_1|}=\frac{|B_1C_1|}{|B_1P|}\implies |B_1A_1|\cdot|B_1C_1|=|B_1D|\cdot|B_1P|.$$

Analogno, koristeći tetivne četverokute ABA_1B_1 i C_1BCB_1 dobivamo sljedeće jednakosti kutova:

$$\angle B_1AC_1=180^\circ-\angle B_1A_1B=\angle B_1A_1C$$
$$\angle AB_1C_1=180^\circ-\angle C_1B_1C=\angle CBA=180^\circ-\angle A_1B_1A=\angle A_1B_1C.$$

Iz ovih dviju jednakosti slijedi da su trokuti B_1AC_1 i B_1A_C slični, iz čega slijedi

$$\frac{|B_1C_1|}{|B_1C|}=\frac{|AB_1|}{|A_1B_1|}\implies |B_1A_1|\cdot|B_1C_1|=|B_1A|\cdot|B_1C|.$$

Dakle, dobili smo $|B_1D'|\cdot|B_1P|=|B_1D|\cdot|B_1P|=|B_1A_1|\cdot|B_1C_1|=|B_1A|\cdot|B_1C|$, pa prema obratu potencije točke slijedi da je četverokut $APCD'$ tetivan, što je i trebalo dokazati.

3. zadatak

Dokaži da sljedeća nejednakost vrijedi za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d, e i f:

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{a+b+d}}+\sqrt[3]{\frac{def}{c+e+f}}<\sqrt[3]{(a+b+d)(c+e+f)}.$$

(Dimitar Trenevski)

Rješenje.
Nejednakost je ekvivalentna sljedećoj

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+d)^2(c+e+f)}}+\sqrt[3]{\frac{def}{(a+b+d)(c+e+f)^2}}<1.$$

Prema A-G nejednakosti vrijedi

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+d)^2(c+e+f)}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b+d}+\frac{b}{a+b+d}+\frac{c}{c+e+f}\right),$$

$$\sqrt[3]{\frac{def}{(a+b+d)(c+e+f)^2}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{d}{a+b+d}+\frac{e}{c+e+f}+\frac{f}{c+e+f}\right).$$

Zbrajajući nejednakosti dobivamo

$$\sqrt[3]{\frac{abc}{(a+b+d)^2(c+e+f)}}+\sqrt[3]{\frac{def}{(a+b+d)(c+e+f)^2}}\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{a+b+d}{a+b+d}+\frac{c+e+f}{c+e+f}\right)=\frac{2}{3}<1,$$

što je trebalo dokazati.

4. zadatak

Olja zapiše n prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$ strogo manjih od p_n, gdje p_n označava n-ti prosti broj. Oleg može odabrati dva (ne nužno različita) broja x i y te jednoga od njih zamijeniti produktom xy. Ako se pojave dva jednaka broja Oleg pobjeđuje. Može li Oleg garantirati pobjedu?

(Matko Ljulj)

Rješenje.
Za $n = 1$, Oleg neće moći napisati dva jednaka broja na ploči jer će uvijek na ploči biti zapisan jedan broj. Nadalje gledamo slučaj $n > 2$.

Primijetimo da kako su svi prirodni brojevi na početku strogo manji od p_n, stoga vrijedi da su prosti faktori tih brojeva iz skupa $\{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$, dakle ima ih $n-1$. Reprezentirajmo svaki broj $a_1, a_2, \ldots, a_n$ uređenom $(n-1)$-torkom nenegativnih cijelih brojeva na sljedeći način: ako je $a_i = p_1^{\alpha_{i,1}} \cdot p_2^{\alpha_{i,2}} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\alpha_{i,(n-1)}}$, tada ćemo mu pridružiti $v_i = (\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots, \alpha_{i,(n-1)})$, za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Pogledajmo sljedeći sustav jednadžbi:

$$\begin{gathered}\alpha_{1,1}x_1+\alpha_{2,1}x_2+\cdots+\alpha_{n,1}x_n=0\\ \alpha_{1,2}x_1+\alpha_{2,2}x_2+\cdots+\alpha_{n,2}x_n=0\\ \cdots\\ \alpha_{1,(n-1)}x_1+\alpha_{2,(n-1)}x_2+\cdots+\alpha_{n,(n-1)}x_n=0\end{gathered}$$

On ima trivijalno rješenje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. No, kako gornji sustav ima manje jednadžbi nego nepoznanica, možemo zaključiti da taj sustav ima beskonačno mnogo rješenja u skupu racionalnih brojeva (jer su koeficijenti racionalni). Neka je $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ neko netrivijalno rješenje (rješenje u kojem svi brojevi y_i nisu jednaki nula). Tada možemo zapisati gornji sustav preko početnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$\prod_{i=1}^{n}a_i^{y_i}=\prod_{i=1}^{n}p_1^{\alpha_{i,1}y_i}\cdot p_2^{\alpha_{i,2}y_i}\cdot\ldots\cdot p_{n-1}^{\alpha_{i,(n-1)}y_i}=\prod_{j=1}^{n-1}p_j^{\alpha_{1,j}y_1+\alpha_{2,j}y_2+\cdots+\alpha_{n,j}y_n}=\prod_{j=1}^{n-1}p_j^0=1$$

$$\Longrightarrow\prod_{i=1}^{n}a_i^{y_i}=1.$$

Promatrajući brojeve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ kao racionalne brojeve u kojima su maksimalno skraćeni brojnik i nazivnik, označimo sa L najveći zajednički višekratnik svih njihovih nazivnika. Potencirajući gornju jednakost na L, dobivamo sve cijele eksponente u jednakosti (koji su dapače međusobno relativno prosti). Nadalje, BSO možemo pretpostaviti da su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oni elementi a_i čiji je eksponent u toj jednakosti negativan, a brojevi $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+l}$ oni elementi čiji je eksponent u toj jednakosti pozitivan (za neke $k, l \in \mathbb{N}$, $k + l \leqslant n$). Tada, kada sve a_i-jeve s negativnim eksponentom prebacimo da desnu stranu jednakosti, a one s eksponentom jednakim nula izbacimo iz jednakosti, dobivamo da sljedeća jednakost

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^{r_i} = \prod_{i=k+1}^{l} a_i^{r_i} \tag{2}$$

vrijedi za neke prirodne brojeve $r_1, r_2, \ldots, r_{k+l}$ za koje je $D(r_1, r_2, \ldots, r_{k+l}) = 1$ i za neke brojeve na ploči $a_1, a_2, \ldots, a_{k+l}$. (Primijetimo da se na svakoj strani jednakosti mora nalaziti barem jedan broj a_i, u suprotnom se na početku na ploči nalaze samo jedinice.)
Dokazat ćemo da postoji niz transformacija kojim ćemo koristeći ovu relaciju moći na ploči dobiti dva jednaka prirodna broja za bilo koje početne brojeve $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Lema 1: Neka je $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ i $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ takvi da je $D(x_1, x_2) = 1$. Tada postoji niz transformacija koji na mjesta (a, b) zapisuje brojeve (a', b'), gdje je jedan od tih brojeva a', b' jednak $a^{x_1} b^{x_2}$.

Dokaz: To ćemo dokazati indukcijom po $x_1 + x_2$, za sve $(a, b) \in \mathbb{N}$. U bazi indukcije je $x_1 + x_2 = 2 \implies x_1 = x_2 = 1$. Broj ab dobije se transformacijom $(a, b) \to (a, ab)$.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve (x_1, x_2) takve da je $x_1 + x_2 < n$, te za sve (a, b). Uzmimo neke (x_1, x_2) takve da je $x_1 + x_2 = n$ i neke proizvoljne (a, b). Ako je $x_1 = x_2$, budući da su x_1 i x_2 relativno prosti, vrijedi da su oba jednaka 1, no to smo već dokazali u bazi indukcije. Pretpostavimo $x_1 \neq x_2$. BSO $x_1 > x_2$. Tada napravimo transformaciju $(a, b) \to (a, ab)$, a zatim iskoristimo pretpostavku indukcije na brojeve (a, ab) i $(x_1 - x_2, x_2)$:

$$(a, b) \to (a, ab) \to (\gamma, a^{x_1 - x_2}(ab)^{x_2}) = (\gamma, a^{x_1} b^{x_2}),$$

gdje je γ neki prirodan broj, što je i trebalo dokazati.

Lema 2: Neka je $k \in \mathbb{N}$, $(b_1, b_2, \ldots b_k) \in \mathbb{N}^k$ i $(x_1, x_2, \ldots x_k) \in \mathbb{N}^k$. Tada postoji niz transformacija koji na mjesta $(b_1, b_2, \ldots b_k)$ zapisuje brojeve $(b_1', b_2', \ldots b_k')$ takve da je jedan od tih brojeva jednak

$$(b_1^{x_1} b_2^{x_2} \cdots b_k^{x_k})^{\frac{1}{d}},$$

gdje je d najveći zajednički djelitelj brojeva $x_1, x_2, \ldots x_k$.

Dokaz: Intuitivno, ova lema sastoji se od $(k-1)$ ponavljanja *Leme 1.*
Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po k, za sve $b_1, b_2, \ldots b_k$ i $x_1, x_2, \ldots x_k$. Za $k = 1$, vrijedi $d = x_1$, pa ne treba izvesti niti jednu transformaciju da bi se postigao željeni rezultat.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k \in \mathbb{N}$. Uzmimo proizvoljne $(b_1, b_2, \ldots b_k, b_{k+1})$ i $(x_1, x_2, \ldots x_k, x_{k+1})$. Iskoristimo *Lemu 1* na brojeve (b_k, b_{k+1}) i (x_k', x_{k+1}'), gdje su $x_k' = \frac{x_k}{d_1}$, $x_{k+1}' = \frac{x_{k+1}}{d_1}$, $d_1 = D(x_k, x_{k+1})$, a zatim pretpostavku indukcije na brojeve $(b_1, b_2, \ldots b_k^{x_k'} b_{k+1}^{x_{k+1}'})$ i $(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, d_1)$:

$$(b_1, b_2, \ldots b_k, b_{k+1}) \to (b_1, b_2, \ldots b_{k-1}, \gamma_k, b_k^{x_k'} b_{k+1}^{x_{k+1}'}) \to (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k, (b_1^{x_1} b_2^{x_2} \cdots b_{k-1}^{x_{k-1}} (b_k^{x_k'} b_{k+1}^{x_{k+1}'})^{d_1})^{\frac{1}{d_2}}),$$

gdje su $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ neki prirodni brojevi i $d_2 = D(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, d) = D(x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_k, x_{k+1}) = d$. Primijetimo da je zadnji član u gornjim transformacijama upravo onaj koji smo htjeli dobiti.

Lema 3: Neka je $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ i $(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2$ takvi da je $D(x_1, x_2) = 1$. Tada postoji niz transformacija koji na mjesta (a, b) zapisuje brojeve (a', b') za koje vrijedi $a'/b' = a^{x_1}/b^{x_2}$.

Dokaz: To ćemo dokazati indukcijom po $x_1 + x_2$, za sve $(a, b) \in \mathbb{N}$. U bazi indukcije je $x_1 + x_2 = 2 \implies x_1 = x_2 = 1$, pa niti jedna transformacija ne treba biti izvedena da bi se postigao željeni rezultat.
Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve (x_1, x_2) takve da je $x_1 + x_2 < n$, te za sve (a, b). Uzmimo neke (x_1, x_2) takve da je $x_1 + x_2 = n$ i neke proizvoljne (a, b).

- Jedan od brojeva x_1 i x_2 je paran (BSO to je x_1): napravimo transformaciju $(a, b) \to (a^2, b)$, a zatim iskoristimo pretpostavku indukcije za (a^2, b) i $(\frac{x_1}{2}, x_2)$.
- Oba broja su neparna i jednaka: onda su oba jednaka jedan, što smo rješili u bazi indukcije.
- Oba broja su neparna i različita (BSO $x_1 > x_2$): napravimo transformacije $(a, b) \to (a, ab) \to (a^2, ab)$, a zatim iskoristimo pretpostavku indukcije za (a^2, ab) i $(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2)$:

  $$(a, b) \to (a, ab) \to (a^2, ab) \to (c \cdot (a^2)^{\frac{x_1 + x_2}{2}}, c \cdot (ab)^{x_2}) = ((a^{x_2} c) \cdot a^{x_1}, (a^{x_2} c) \cdot b^{x_2}),$$

  gdje je c neki prirodan broj, što je i trebalo dokazati.

Ove tri leme pomoći će nam dovršavanju dokaza.

U jednakosti (1), neka je $d_1 = D(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, $d_2 = D(r_{k+1}, r_{k+2}, \ldots, r_{k+l})$, $z_i = \frac{r_i}{d_1}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $z_i = \frac{r_i}{d_2}$, $\forall i \in \{k+1, k+2, \ldots, k+l\}$. Također, neka je A lijeva strana jednakosti (1), B desna strana jednakosti, $A' = A^{\frac{1}{d_1}}$ i $B' = B^{\frac{1}{d_2}}$. Cilj nam je napraviti takve transformacije da se na ploči nađu dva broja x i y koji će se odnositi kao A i B.

Primijenimo *Lemu 2* na brojeve $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ i $(z_1, z_2, \ldots, z_k)$; sada se na ploči (među ostalim dobivenim brojevima) nalazi i broj A'. Također, primijenjujući istu lemu na brojeve $(a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+l})$ i $(z_{k+1}, z_{k+2}, \ldots, z_{k+l})$, na ploči će se pojaviti broj B'.

Brojevi d_1 i d_2 su relativno prosti (u suprotnom bi postojao broj p koji bi dijelio d_1 i d_2, pa bi time dijelio i sve brojeve $r_1, r_2, \ldots, r_{k+l}$, što je u kontradikciji s time da su oni relativno prosti). Zato možemo primijeniti *Lemu 3* na brojeve (A', B') i (d_1, d_2). Sada se na ploči nalaze dva prirodna broja koja se odnose kao A i B. Kako prema (1) vrijedi $A = B$, na ploči su se nakon konačno mnogo poteza pojavila dva jednaka broja, što smo i htjeli postići.

Dakle, Oleg može garantirati pobjedu za svaki $n > 1$.

Napomena: Do relacije (1) moglo se doći i zaključivanjem da je skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno zavisan jer je podskup $(n-1)$-dimenzionalnog prostora $\mathbb{Q}^{n-1}$.