Reli

1. U nekoj zemlji 10 posto zaposlenih dobiva 90 posto od sume plaća svih zaposlenih u toj zemlji. Pretpostavimo da je zemlja podijeljena u nekoliko regija. Jeli moguće da je u svakoj regiji ukupna plaća svakih 10 posto zaposlenika te regije ne bude veća od 11 posto od sume plaća svih zaposlenih u toj regiji?

2. U krugu je 99 curica, svaka s po 1 bombonom. Svake minute svaka koja ima bombon da jednoj od svojih susjeda. ako neka curica primi 2 bombona istovremeno, pojede jedan. Za koliko se minimalno minuta mogu riješiti svih bombona?

3. Na n utega različite mase zalijepljeni su papirići s njegovom masom. Nažalost svi su se papirići u neobjašnjenim okolnostima izmiješali. Možete li jednim vaganjem na dugačkoj šipki koja ima oslonac na sredini sa sigurnošću odrediti jesu li svi papirići slučajno i dalje na točnim utezima?

4. Postoji generator prirodnih brojeva između 1 i 256 (uključeno) koji ih sve generira s jednakom vjerojatnošću. Pomoću njega želimo generirati dva prirodna broja između 1 i 10 (uključeno). To radimo na sljedeći način: odaberemo slučajan broj između 1 i 256 te ga podijelimo s 10 ukoliko je ostatak veći od 0 uzmemo ostatak, ukoliko je ostatak 0 uzmemo 10. Koja je vjerojatnost da na ovakav način odaberemo dva jednaka broja?

5. Dokažite da se pravokutnik čije stranice zadovoljavaju $\frac{b}{2} < a < b$ uvijek može razrezati u tri komada koji drugačije raspoređeni tvore kvadrat. (Dozvoljene su isključivo rotacije i translacije u ravnini pravokutnika.)

6. Za neka dva nepoznata pozitivna broja x i y na četiri kartice su zapisani brojevi $x+y, x-y, xy$ i $\frac{x}{y}$. Može li se iz ovih podataka odrediti koji su bili početni brojevi?

7. Neka je $q > 2$ fiksan prost broj. Za prost broj p kažemo da je poseban ako za svaki cijeli broj a postoji cijeli broj r takav da $r^q \equiv a (mod p)$. Dokažite da postoji beskonačno mnogo posebnih brojeva.

8. Odredite sve parove (x, y) cijelih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu $3x^2 + 4 = 2y^3$.

9. Za dani prirodan broj n odredite $NZD(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1})$.

10. Odredite najmanji prirodan broj n takav da su brojevi $n, n+1, \dots, n+10$ složeni.

11. Zadan je niz takav da je $a_1 = 1, a_2 = 2$, a svaki sljedeći a_n je definiran kao najmanji prirodni broj koji se do sada nije pojavio u nizu, a nije relativno prost s a_{n-1}. Dokažite da se svi prirodni brojevi pojavljuju u ovom nizu.

12. Odredite maksimum od $m+n$ za prirodne brojeve $m, n \leq 100$ takve da je $m+1 \equiv 3 (mod 4)$ i da postoji prost broj p i nenegativan cijeli broj a takav da je $\frac{m^{2^n-1}-1}{m-1} = m^n + p^a$.

13. Neka je p polinom stupnja većeg od 2 s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $p(0) = 3$ i $p(1) = 11$. Koliko postoji takvih polinoma koji imaju točno dva cjelobrojna korijena?

14. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(xy) \leq xf(y)$.

15. Postoje li brojevi a, b, c različiti od 0 takvi da za svaki $n > 3$ postoji polinom oblika $x^n + \ldots + ax^2 + bx + c$ sa točno n (ne nužno različitih) cjelobrojnih nultočki?

16. Neka je $(a_n)_{n\geq 1}$ niz realnih brojeva takav da je $a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}, n \in \mathbb{N}$. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}, a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$.

17. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta ABC, s njegov poluopseg, n prirodan broj. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{2}{3}^{n-2} s^{n-1}.$$

18. Neka je k prirodan broj. Dokažite da za pozitivne realne brojeve koji zadovoljavaju $x + y + z = 1$, vrijedi nejednakost:

$$\frac{x^{k+2}}{x^{k+1} + y^k + z^k} + \frac{y^{k+2}}{y^{k+1} + z^k + x^k} + \frac{z^{k+2}}{z^{k+1} + x^k + y^k} \geq \frac{1}{7}.$$

19. Neka je ABC trokut takav da je $\angle BAC = 45°, \angle BCA = 30°$ i $\overline{AB} = 1$. Točka D nalazi se na dužini AC tako da je $AB = BD$. Odredite kvadrat udaljenosti dirališta zajedničke tangente kružnica opisanih trokutima BDC i ABC.

20. Neka je kugla zanemarive veličine položena u središte biljarskog stola oblika jednakostraničnog trokuta. Kugla se uvijek giba po ravnim linijama, odbija od mantinela pod pravilnim kutovima i ne zaustavlja bez naše intervencije. Nakon što je odigramo u proizvoljnom smjeru zaustavljamo je ukoliko u nekom trenutku dođe do polovišta jedne od stranica. Zatim zabilježimo točku koja je na polovištu njezine ukupne putanje. Koliko različitih točaka ovakvim postupkom možemo zabilježiti?

21. U konveksnom četverokutu $ABCD$ je $\angle BAC = \angle DAC = 55°, \angle DCA = 20°, \angle BCA = 15°$. Odredite veličinu kuta $\angle DBA$.

22. U unutrašnjosti pravokutnog trokuta ABC ($\angle ACB = 90°$) odabrana je točka P takva da je $AP = 4, BP = 2$ i $CP = 1$. Točka Q, koja je simetrična točki P u odnosu na AC pripada opisanoj kružnici trokuta ABC. Odredite kutove trokuta ABC.

23. Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I i neka je D sjecište simetrale $\angle BAC$ i stranice BC. Neka je k opisana kružnica trokuta BIC, a PQ tetiva kružnice k koja prolazi kroz D. Dokažite da je AD simetrala kuta $\angle PAQ$.

24. Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ njima nasuprotni kutovi trokuta ABC. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a+b+c} \leq \frac{1}{2}.$$