

## Uvod u funkcijske jednačbe

28. listopada 2017.

### Funkcija

Za neprazne skupove  $A$  i  $B$  funkcija je uređena trojka  $(A, B, f)$  gdje je  $f$  pravilo pridruživanja takvo da za svaki  $x \in A$  postoji jedinstveni  $y \in B$  takav da je  $y = f(x)$ .

Skup  $A$  je domena, a  $B$  kodomena funkcije. Takvu funkciju simbolički zapisujemo  $f: A \rightarrow B$ .

Skup svih vrijednosti koje funkcija poprima zovemo slika funkcije. Važno je napomenuti za kodomena i slika funkcije nisu jedno te isto. Npr. za funkciju  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , kodomena je  $\mathbb{R}$ , a slika funkcije  $\mathbb{R}_0^+$ . Međutim, uvijek je slika funkcije podskup kodomene.

### Neka svojstva funkcija

**PARNOST-NEPARNOST:** Funkcija je parna akko vrijedi

$$f(x) = f(-x)$$

za sve  $x$  iz domene, a neparna akko vrijedi

$$-f(x) = f(-x)$$

za sve  $x$  iz domene.

**MONOTONOST:** Funkcija je monotona akko

$$x > y \implies f(x) \geq f(y)$$

za sve  $x$  i  $y$  iz domene (tada je rastuća) ili

$$x > y \implies f(x) \leq f(y)$$

za sve  $x$  i  $y$  iz domene (tada je opadajuća).

**NEPREKIDNOST:** Funkcija je neprekidna ako graf te funkcije možemo nacrtati u koordinatnom sustavu bez dizanja olovke. Ovo je neformalna definicija, formalna koristi limese. **INJEKCIJA:** Funkcija je injekcija akko nikoje 2 vrijednosti funkcije nisu iste, formalnije,

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

**SURJEKCIJA:** Funkcija je surjekcija akko za svaki element  $y$  iz kodomene postoji  $x$  iz domene takav da je  $y = f(x)$ . Za takve funkcije je slika funkcije jednaka kodomeni.

**BIJEKCIJA:** Funkcija je bijekcija ako je surjekcija i injekcija, odnosno za svaki  $y$  iz kodomene postoji jedinstveni  $x$  iz kodomene takav da je  $y = f(x)$ .

**KOMPOZIJA:** Funkcija  $h$  je kompozicija funkcija  $f$  i  $g$  ako je

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: C \rightarrow D$$

$$h: A \rightarrow D$$

i

$$h(x) = g(f(x)) \text{ za sve } x \in A$$

**INVERZNA FUNKCIJA:** Ako za funkciju  $f: A \rightarrow B$  postoji funkcija  $g: B \rightarrow A$  takva da je

$$f(g(x)) = g(f(x)) = x$$

onda je  $g$  inverzna funkcija od  $f$ .

Za vježbu dokažite da funkcija ima inverz akko je bijekcija.

# Funkcijske jednadžbe i metode rješavanja

Rješavanje funkcijskih jednadžbi je nalaženje svih funkcija koje zadovoljavaju zadane uvjete i dokazivanje da jedino te funkcije zadovoljavaju te uvjete.

Neke od metoda kojima se služimo u rješavanju su:

- pogađanje rješenja, ovo je vrlo bitno jer ako slutimo koje su funkcije rješenje, to nam može pomoći u rješavanju
- uvrštavanje konkretnih vrijednosti u jednadžbu, vrijednosti koje uvijek treba uvrstiti (ako je moguće) su  $0, 1, -1$  jer su  $0$  i  $1$  neutralni elementi za zbrajanje i množenje, a s  $-1$  možemo pokratiti neke stvari
- supstitucije i definiranje novih funkcija preko postojeće
- traženje surjektivnosti i injektivnosti
- traženje nultočaka i fiksnih točaka (fiksna točka je  $x$  takav da je  $f(x) = x$ )
- indukcija (korisna za traženje vrijednosti u cjelobrojnim i racionalnim točkama)

**VAŽNO!!!** Na kraju sva rješenja obavezno treba provjeriti jer smo rješavanjem jednadžbe dobili sljedeću implikaciju: ako je  $f$  rješenje jednadžbe, onda je  $f$  jedna od sljedećih funkcija:  $\dots$ , pa moramo provjeriti rješenja za drugi smjer implikacije.

## Primjer 1.

Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  za koje je

$$f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z)$$

za sve  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $y = 0$  i  $z = 0$  dobivamo

$$f(0) = xf(x)$$

Sada početni uvjet zapravo postaje

$$f(xyz) = 3f(0)$$

ili, ako ovrstimo  $y = z = 1$ ,

$$f(x) = 3f(0)$$

za sve  $x \in \mathbb{R}$ , pa i za  $x = 0$  što znači da je  $f(0) = 3f(0) = 0$ , odnosno  $f(x) = 0$ .

**Provjera:**

$$0 = f(xyz) = xf(x) + yf(y) + zf(z) = 0$$

znači,  $f(x) = 0$  je rješenje jednadžbe.

Provjera je uvijek nužna jer sve informacije koje smo dobili zapravo znače: ako je funkcija rješenje, onda za nju vrijedi to što smo dobili.

## Primjer 2.

Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  za koje je

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{Q}$

*Dokaz.* Uvrštavanjem  $y = 0$  dobivamo

$$f(x) = f(x) + f(0) \implies f(0) = 0$$

Uvrštavanjem  $y = -x$  dobivamo

$$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$$

Neka je  $f(1) = c$ .

Vrijedi

$$f(nx) = f(x + x + \dots + x) = f(x) + f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$$

za sve  $n \in \mathbb{N}$ . Dakle, vrijedi i

$$f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{f(nx)}{m} = \frac{n}{m}f(x)$$

za sve  $n, m \in \mathbb{Q}^+$ .

To znači da je  $f(q) = qf(1) = qc$  za sve  $q \in \mathbb{Q}$ .

Lako se vidi da to zbilja je rješenje jednadžbe.

Ova jednadžba se zove **CAUCHYEVA FUNKCIJSKA JEDNADŽBA**. Ako je domena funkcije  $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$  ili sličan prebrojiv skup, onda je jedino rješenje  $f(x) = cx$ , za neku konstantu  $c$ . Ako je domena  $\mathbb{R}$ , onda uz  $f(x) = cx$  postoje i druga "divlja" rješenja, međutim, ako još imamo i uvjet neprekidnosti ili monotonosti, onda je jedino rješenje linearna funkcija

Sad ćemo dokazati da, ako imamo uvjet monotonosti, da je jedino rješenje linearno.

*Dokaz.* Znamo da je  $f(q) = cq$  za racionalne brojeve i želimo da je  $f(x) = cx$  za sve realne brojeve.

Pretpostavimo da postoji  $a \in \mathbb{R}$  t.d. je  $f(a) > ca$ . Tada postoji racionalan broj  $q$  između  $f(a)$  i  $ca$  pa vrijedi:

$$f(a) > f(q) = cq > ca$$

što je kontradikcija s monotonošću. Analogno se pokaže i da ne postoji  $b \in \mathbb{R}$  t.d. je  $f(b) < cb$ . Dakle, za sve  $x$  vrijedi  $f(x) = cx$ .

Lako se vidi da to zbilja je rješenje jednadžbe.

### Primjer 3.

Postoji li  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.d. za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)?$$

*Dokaz.* Kako je domena  $\mathbb{N}$ , vrijedi

$$f(n+1) - f(n) = f(f(n)) \geq 1$$

pa je funkcija strogo rastuća i lako se matematičkom indukcijom dokaže  $f(n) \geq n$ .

Međutim, vrijedi i

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n) < f(n+1) \implies f(n) < n+1$$

zbog stroge rastačnosti. Dakle,  $f(n) = n$ .

**Provjera:**

$$n = f(f(n)) = f(n+1) - f(n) = 1$$

što ne vrijedi za  $n > 1$ . Dakle, ova jednadžba nema rješenja.

### Primjer 4.

Postoji li surjeksija  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  t.d. za svaki  $n \in \mathbb{N}$  vrijedi  $f(n) \geq n + (-1)^n$ ?

*Dokaz.* Primijetimo prvo da je  $f(n) \geq n - 1$ . (\*)

To znači da ako je  $f(a) = 1$  (mora postojati zbog surjektivnosti), onda je  $a \leq 2$ . Kako je  $f(2) \geq 3$ , mora biti  $f(1) = 1$ . Sad ćemo indukcijom po  $k$  dokazati da je  $f(2k) = 2k + 1$  i  $f(2k + 1) = 2k$  za svaki  $k \in \mathbb{N}$ .

**BAZA:**  $k = 1$

Neka je  $a$  takav da je  $f(a) = 2$  (postoji zbog surjektivnosti). Mora biti  $a \leq 3$  (\*). Kako je  $f(1) = 1$  i  $f(2) \leq 3$ , mora biti  $a = 3$ , tj.  $f(3) = 2$ .

Neka je  $b$  takav da je  $f(b) = 3$  (postoji zbog surjektivnosti). Mora biti  $a \leq 4$  (\*). Kako je  $f(1) = 1$ ,  $f(3) = 2$  i  $f(4) \leq 5$ , mora biti  $a = 2$ , tj.  $f(2) = 3$ .

**KORAK:** Pretpostavljamo da je  $f(1) = 1$  te  $f(2i) = 2i + 1$  i  $f(2i + 1) = 2i$  za sve  $i \leq n - 1$ . Dokazat ćemo  $f(2n) = 2n + 1$  i  $f(2n + 1) = 2n$ .

Neka je  $a$  takav da je  $f(a) = 2n$ . Mora biti  $a \geq 2n$  (pretpostavka) i  $a \leq 2n + 1$  (\*). Kako je  $f(2n) \geq 2n + 1$ , mora biti  $f(2n + 1) = 2n$ .

Neka je  $b$  takav da je  $f(b) = 2n + 1$ . Mora biti  $a \geq 2n$  (pretpostavka) i  $a \leq 2n + 2$  (\*). Kako je  $f(2n + 1) = 2n$  i  $f(2n + 2) \geq 2n + 3$ , mora biti  $f(2n) = 2n + 1$ .

Dakle, jedino rješenje jednadžbe je  $f(1) = 1, f(2k) = 2k + 1, f(2k + 1) = 2k$  za sve  $k \in \mathbb{N}$ . Kad ga uvrstimo u početni uvjet, dobijemo da zadovoljava uvjete zadatka.

## Zadaci

### Zadatak 1.

Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  t.d.

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Zadatak 2.

Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.d.

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Zadatak 3.

Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  t.d.  $f(x)f(y) = f(x-y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Zadatak 4.

Nađi sve funkcije  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  t.d.

$$2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

### Zadatak 5.

Nađi sve funkcije  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  takve da vrijedi  $f(0) = 0$  i

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y|, x, y \in [0, 1]$$

### Zadatak 6.

Nađi sve strogo rastuće  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je  $f(f(x)) = x$  za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

### Zadatak 7.

Nađi sve  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  takve da vrijedi

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)}$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}^+$ .

### Zadatak 8.

Nađi sve  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da vrijedi

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y))$$

za sve  $x \in \mathbb{R}$ .

### Zadatak 9.

Nađi sve  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da vrijedi

$$f(x^2 + f(y)) = y - x^2$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Zadatak 10.

Nađi sve  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  takve da je

$$f(1) = 2$$

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1$$

za sve  $x, y \in \mathbb{Q}$

### Zadatak 11.

Nađi sve  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takve da je

$$f(f(x) - f(y)) = (x - y)^2 f(x + y)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

## Hintovi

1. Uvedi supstituciju  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$
2. Uvrsti  $y = 0$  i  $x = y$
3. Dokaži parnost.
4. Uvrsti  $\frac{1}{x}$
5. Nađi  $f(1)$ .
6. Pretpostavi da za neki  $a$ ,  $f(a) > a$  ili  $f(a) < a$ .
7. Dobij multiplikativnost i nakon toga aditivnost.
8. Uvrsti  $x = y$ .
9. Uvrsti  $x = 0$  i  $y = f(y)$ .
10. Dokaži  $f(z) = z + 1$  za cijele brojeve.
11. Uvrsti  $x = y$  i dokaži djelomičnu surjektivnost.

## Rješenja

1. Kad napravimo supstituciju  $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ , dobijemo  $g(x+y) = g(x) + g(y)$  kojoj je jedino rješenje u  $g(x) = cx$ . Dakle jedino moguće rješenje je  $f(x) = cx + \frac{x^2}{2}$  i lako se provjeri da je to stvarno rješenje polazne jednačbe.
2. Kad uvrstimo  $y = 0$  dobijemo  $xf(0) = xf(x)f(0)$ , odnosno  $f(0) = f(x)f(0)$  za sve  $x$  koji nisu jednaki 0. Ako  $f(0) \neq 0$ , onda je  $f(x) = 1$  za sve  $x \neq 0$  i lako se provjeri da je to jedno rješenje. Ako je  $f(0) = 0$ , uvrstimo  $x = y \neq 0$  i dobijemo  $2xf(x) = 2xf(x)^2 \implies f(x) = 0, 1$  za sve  $x \neq 0$ . Ako postoje  $a \neq 0, f(a) = 0$  i  $b \neq 0, f(b) = 1$ , uvrstimo  $x = a, y = b$  i dobijemo  $af(b) = 0$ , kontradikcija. Dakle, jedina rješenja su  $f(x) = 0, f(x) = 1$  za  $x \neq 0$  i  $f(0) = c$  gdje je  $c$  bilo koji realni broj. Lako se provjeri da su to rješenja.
3. Zamijenimo li  $x$  i  $y$ , dobijemo da je funkcija parna. Sad možemo umjesto  $y$  uvrstiti  $-y$ , dobijemo  $f(x-y) = f(x+y)$  za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ , dakle, funkcija je konstantna. Provjerom se dobije da su jedine moguće konstante 0 i 1.
4. Uvrstimo li  $\frac{1}{x}$  u jednačbu, dobijemo  $2f(\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x}$ . Dakle, dobili smo sustav 2 jednačbe s 2 nepoznanice s jedinstvenim rješenjem  $f(x) = \frac{2x-\frac{1}{x}}{3}, f(\frac{1}{x}) = \frac{\frac{2}{x}-x}{3}$ . Dakle, jedino moguće rješenje je  $f(x) = \frac{2x-\frac{1}{x}}{3}$ . Provjerom se dobije da je to stvarno rješenje polazne jednačbe.

5. Uvrstimo li  $y = 0$ , dobivamo

$$|f(x)| \geq |x| \implies f(x) \geq x$$

To znači da je

$$f(1) \geq 1 \implies f(1) = 1$$

Uvrstimo li sad  $y = 1$ , dobivamo

$$|1 - f(x)| \geq |1 - x| \implies f(x) \leq x$$

Kako imamo  $f(x) \geq x$  i  $f(x) \leq x$ , jedino moguće rješenje je

$$f(x) = x$$

i lako se vidi da ono zadovoljava jednačbu.

6. Pretpostavimo da je za neki  $a$   $f(a) > a$ . Tada zbog rastačnosti vrijedi

$$f(f(a)) > f(a) > a$$

što nije moguće. Slučaj  $f(a) < a$  se rješava analogno.

Dakle, jedina mogućnost je  $f(x) = x$  za sve  $x \in \mathbb{R}$  i lako se vidi da ono zadovoljava jednačbu.

7. Jedna rješenja su  $f(x) = 1$  i  $f(x) = x$  za sve  $x \in \mathbb{R}^+$ . Inače postoji  $a$  takav da je  $f(a) \neq 1$ . Sada vrijedi

$$f(a)^{f(xy)} = f(a^{xy}) = f(a^x)^{f(y)} = f(a)^{f(x)f(y)} \implies f(xy) = f(x)f(y)$$

jer  $f(a) \neq 1$ . Sada je

$$f(a)^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x)f(a^y) = f(a)^{f(x)}f(a)^{f(y)} = f(a)^{f(x)+f(y)} \implies f(x+y) = f(x) + f(y)$$

jer  $f(a) \neq 1$ .

Iz jednačbe  $f(xy) = f(x)f(y)$  se dobije

$$f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$$

dakle

$$f(x) \geq 0, x \geq 0$$

pa dobivamo

$$f(x+a) = f(x) + f(a) \geq f(x), a \geq 0$$

odnosno funkcija je rastuća. Dakle, dobili smo uvjet monotonosti na Cauchyevu funkcijsku pa je jedino rješenje  $f(x) = cx, x \in \mathbb{R}^+, c \in \mathbb{R}^+$ .

**Provjera:**  $cx^y = cx^{cy} \implies c = 1$ , dakle jedina su rješenja  $f(x) = 1$  i  $f(x) = x$ .

8. Uvrstimo li  $x = y$ , dobivamo

$$f(x) \geq x^2$$

s druge strane za svaki  $x$  postoji neki  $a$  t.d.

$$f(x) = 2ax - f(a) \implies x^2 + a^2 \leq 2ax \implies a = x \implies f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$

Lako se vidi da je to zbilja rješenje jednadžbe.

9. Uvrstimo li  $x = 0$ , dobivamo

$$f(f(y)) = y, y \in \mathbb{R}$$

Uvrstimo li sad  $y = f(0)$ , dobivamo

$$f(x^2) = f(0) - x^2$$

odnosno

$$f(x) = f(0) - x, x \geq 0$$

Sad možemo u početnu jednadžbu uvrstiti takav  $x$  da je  $x^2 + f(y) > 0$  i onda imamo

$$y - x^2 = f(0) - x^2 - f(y) \implies f(x) = f(0) - x, x \in \mathbb{R}$$

Lako se vidi da to stvarno jest rješenje jednadžbe.

10. Uvrstimo li  $y = 1$ , dobivamo

$$f(x+1) = f(x) + 1$$

što znači da je

$$f(z) = z + 1$$

za sve cjelobrojne  $z$  i da je

$$f(x+z) = f(x) + z$$

za sve racionalne  $x$  i cijele  $z$  (ova zadnja tvrdnja se lako dokaže indukcijom). Ako sada uvrstimo  $x = \frac{p}{q}$  i  $y = q$ , gdje su  $p$  i  $q$  cjelobrojni, dobivamo

$$p+1 = f(p) = (q+1)f\left(\frac{p}{q}\right) - f\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1 = qf\left(\frac{p}{q}\right) - q + 1 \implies f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{q} \implies f(x) = x+1$$

za sve racionalne  $x$ . Lako se vidi da je to stvarno rješenje jednadžbe.

11. Jedno rješenje je  $f(x) = 0$  za sve  $x$ . Pretpostavimo sad da postoji  $a$  takav da  $f(a) \neq 0$ . Pretpostavimo da je  $f(a) > 0$ , drugi slučaj se rješava analogno.

Uvrstimo li  $x = y$ , dobivamo  $f(0) = 0$ . Uvrstimo li sad  $x$  i  $y$  takve da je  $x+y = a$  i  $x-y = k$ , gdje je  $k$  bilo koji broj, dobivamo da funkcija može postići sve nenegativne vrijednosti.

Uvrstimo li zamijenjene  $x$  i  $y$  u jednadžbu, dobivamo

$$f(f(x) - f(y)) = f(f(y) - f(x)) \implies f(z) = f(-z)$$

za sve  $z$  zbog djelomične surjektivnosti.

Sad uvrstimo  $y = -y$  i dobivamo

$$f(f(x) - f(y)) = (x-y)^2 f(x+y) = (x+y)^2 f(x-y) \implies \frac{f(z)}{z^2} = c$$

Dakle jedino moguće rješenje je  $f(x) = cx^2$ .

**Provjera:**

$$c^3(x^2 - y^2)^2 = c(x-y)^2(x+y)^2 \implies c = 1$$

U drugom slučaju se dobije  $c = -1$ . Dakle, jedina su rješenja  $f(x) = 0$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = -x^2$ .