

Simulacija državnog natjecanja

20.3.2016.

Ovogodišnji niz simulacija završavamo zadatcima za vježbu za državno natjecanje. Pokušajte ove zadatke riješiti unutar 240 minuta koliko je predviđeno na natjecanju, i to bez ikakvih pomoćnih materijala. Rješenja ćemo, kao i kod prethodne dvije simulacije, objaviti idući tjedan. Sretno s rješavanjem!

Zadatak 1.

Neka su a, b, c različiti cijeli brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$4(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 + 8.$$

Zadatak 2.

Neka su a, b, c, d prirodni brojevi takvi da je $ab - cd$ djeljiv s $a + b + c + d$. Dokažite da je broj $a + b + c + d$ složen.

Zadatak 3.

Andrea i Branimir igraju igru. Andrea ima n kamenčića u šeširu i na početku nekoliko (moguće i nula) kamenčića stavi iz šešira u šaku. U svakom potezu Andrea ili vrati jedan kamenčić u šešir, ili stavi još jedan kamenčić iz šešira u šaku. Branimir zna broj n i nakon svakog Andreinog poteza pogađa koliko je kamenčića u šeširu. Ako pogodi, on pobjeđuje i igra završava. Može li Branimir sigurno pobijediti?

Zadatak 4.

Zadan je pravokutnik $ABCD$. Simetrala dužine \overline{BD} siječe pravce AB i BC redom u točkama E i F . Neka su M i N polovišta dužina \overline{CD} i \overline{AD} . Dokažite da su pravci FM i EN okomiti.

Zadatak 5.

U ravnini je dano n kružnica radijusa 1 tako da se nijedne dvije ne sijeku (kružnice se mogu dodirivati). Dokažite da je kružnice moguće obojati u 4 boje tako da se nijedan par kružnica iste boje ne dodiruje.