Simulacija općinskog natjecanja

Rješenja zadataka

17.1.2016.

Zadatak 1.
Neka je $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, gdje su a, b, c realni brojevi različiti od nule. Dokažite da tada vrijedi:

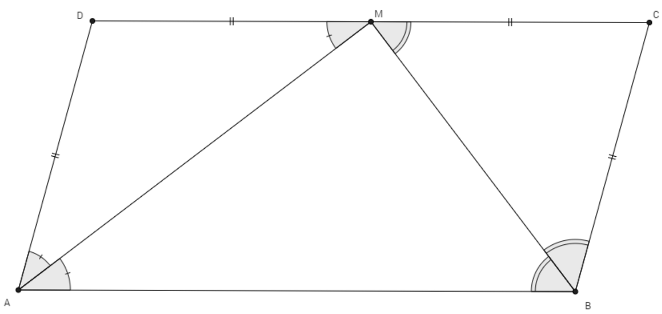
$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3.$$

Rješenje.
Neka je $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$. Tada je $b = ck$ i $a = bk = ck \cdot k = ck^2$ pa je

$$\begin{aligned}
a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}\right) &= c^2k^4c^2k^2c^2\left(\frac{1}{c^3k^6} + \frac{1}{c^3k^3} + \frac{1}{c^3}\right)\\
&= c^6k^6\left(\frac{1+k^3+k^6}{c^3k^6}\right)\\
&= c^3(1+k^3+k^6)\\
&= c^3 + (ck)^3 + (ck^2)^3\\
&= a^3 + b^3 + c^3.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.
U paralelogramu $ABCD$ simetrala kuta $\sphericalangle DAB$ raspolavlja dužinu $\overline{CD}$. Ako sa M označimo polovište dužine $\overline{CD}$, odredite veličinu kuta $\sphericalangle AMB$.

Rješenje.



Označimo $\sphericalangle DAB = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \beta$. Budući da je $ABCD$ paralelogram, znamo da vrijedi $\alpha + \beta = 180°$. Prema pretpostavci zadatka je $\sphericalangle DAM = \sphericalangle MAB = \frac{\alpha}{2}$ i $|CM| = |MD|$. No, vrijedi $\sphericalangle AMD = \sphericalangle MAB = \frac{\alpha}{2}$ (jer su to kutovi uz presječnicu), pa je trokut MDA jednakokračan. Dakle,

$$|MD| = |DA| = |BC|,$$

a odavde slijedi $|BC| = |CM|$, tj. trokut BCM također je jednakokračan. Zbog toga imamo $\sphericalangle BMC = \sphericalangle MBC$, a budući da također vrijedi $\sphericalangle BMC = \sphericalangle MBA$ (jer su to kutovi uz presječnicu), slijedi $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM = \frac{\beta}{2}$. Konačno imamo

$$\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle AMD - \sphericalangle BMC = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°,$$

tj. kut $\sphericalangle AMB$ je pravi.

Zadatak 3.
Nađite sve prirodne brojeve a, b, $a < b$, takve da za sve realne brojeve $x, y \in [a, b]$ vrijedi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in [a, b].$$

Rješenje.
Budući da je $x, y \in [a, b]$, imamo

$$a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{a},$$
$$a \leqslant y \leqslant b \Rightarrow \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\frac{2}{b} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leqslant \frac{2}{a},$$

pa kako bi tvrdnja zadatka bila ispunjena, mora vrijediti

$$\left[\frac{2}{b}, \frac{2}{a}\right] \subseteq [a, b],$$

tj.

$$\frac{2}{b} \geqslant a, \ \frac{2}{a} \leqslant b.$$

Množenjem ovih nejednakosti brojevima a, b, tim redom (ti su brojevi prirodni pa se znak nejednakosti neće promijeniti), dobivamo

$$2 \geqslant ab, \ 2 \leqslant ab.$$

Dakle, mora biti $ab = 2$. Budući da su a i b prirodni brojevi, vidimo da je jedino moguće rješenje $a = 1$, $b = 2$.

Zadatak 4.
Nađite:

(a) neki prirodan broj $n > 1$ koji je barem 2016 puta veći od svakog od svojih prostih faktora,

(b) najmanji prirodan broj s tim svojstvom.

Rješenje.

(a) Uočimo da tvrdnju očito zadovoljava svaki prirodan broj koji nije prost i kojemu su svi prosti faktori veći od 2016. Budući da je 2017 prost broj, jedan takav broj je $n = 2017^2$: njegov jedini prost faktor je 2017 i vrijedi

$$\frac{n}{2017} = 2017 \geqslant 2016.$$

(b) Označimo sa n traženi broj. Ako je n djeljiv s 2, onda je prema pretpostavci zadatka $n \geqslant 2 \cdot 2016 = 4032$. Ukoliko je n djeljiv i s 3, onda je $n \geqslant 3 \cdot 2016 = 6048$. Ukoliko sada pretpostavimo da se n nalazi između ta dva broja (jer tražimo najmanji takav n), slijedi da n može biti djeljiv jedino brojem 2, tj. da je n potencija broja 2. Sada lako vidimo da je $n = 2^{12} = 4096$ traženi broj.

Zadatak 5.
Svaki od n kuhara zna dio nekog recepta za kolač (i svi znaju različite dijelove recepta, a zajedno znaju čitav recept). Dopušteno im je razmjenjivanje svih informacija koje znaju preko telefona, ali tako da u jednom telefonskom razgovoru sudjeluju točno dva kuhara i tijekom tog razgovora točno jedan od njih govori. Odredite najmanji broj telefonskih poziva potrebnih da bi svi kuhari znali čitav recept.

Rješenje.
Najprije uočimo da ćemo nakon konačno mnogo poziva moći postići to da točno jedan kuhar zna čitav recept (tj. ne može se dogoditi da barem dva kuhara istovremeno saznaju čitav recept – to je posljedica toga da tijekom svakog poziva samo jedan kuhar govori). U tom trenutku potreban je minimalno $n-1$ poziv da bi svi kuhari saznali čitav recept – naime, za svakog od preostalih $n-1$ kuhara potreban je jedan poziv u kojem će čuti čitav recept, i to možemo postići tako da, na primjer, taj jedan kuhar koji zna čitav recept nazove sve preostale. Dakle, potrebno je odrediti minimalan broj poziva nakon kojih će jedan kuhar znati čitav recept.
No, da bi jedan kuhar saznao čitav recept, on mora saznati preostalih $n-1$ dijelova recepta od preostalih kuhara, za što svaki od preostalih kuhara mora barem jednom obaviti telefonski poziv i reći nekome svoj dio recepta. Za to je potreban minimalno $n-1$ poziv i nakon tih $n-1$ poziva uistinu možemo postići to da jedan kuhar zna čitav recept (svaki od $n-1$ preostalih kuhara naprosto nazove tog jednog).
Dakle, potrebno je minimalno $(n-1)+(n-1)=2n-2$ telefonskih poziva kako bi svi kuhari znali čitav recept.