

Simulacija županijskog natjecanja

14.2.2016.

Nakon simulacije općinskog natjecanja, slijede zadatci za vježbu za županijsko natjecanje. Kao i kod prošle simulacije, preporučamo da ove zadatke pokušate riješiti unutar 180 minuta (koliko je predviđeno na natjecanju) bez ikakvih pomoćnih materijala, a rješenja vas očekuju idući tjedan. Sretno s rješavanjem!

Zadatak 1.

Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c \leq 3$. Odredite najmanju moguću vrijednost izraza

$$\frac{a+1}{a(a+2)} + \frac{b+1}{b(b+2)} + \frac{c+1}{c(c+2)}.$$

Zadatak 2.

Odredite sve prirodne brojeve n takve da za četiri najmanja djelitelja d_1, d_2, d_3, d_4 od n vrijedi

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$

Zadatak 3.

Za okruglim stolom sjedi 10 učenika. Svaki od učenika zamisli jedan realan broj i taj broj priopći samo svojim susjedima (učenicima koji sjede lijevo i desno od njega) tako da ga pritom drugi učenici ne čuju. Nakon toga, idući u krug, svaki učenik javno kaže aritmetičku sredinu dva broja koja je saznao od svojih susjeda. Ako su redom izrečeni brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, koji je broj zamislio učenik koji je javno rekao broj 6?

Napomena. Aritmetička sredina dva realna broja jest jednaka zbroju tih brojeva podijeljenim s 2.

Zadatak 4.

Upisana kružnica trokuta ABC dira stranicu \overline{BC} u točki D . Neka su točke G i H , tim redom, na stranicama \overline{AB} i \overline{AC} takve da su pravci GH i BC paralelni te da je pravac GH tangenta na upisanu kružnicu. Neka je točka K diralište upisane kružnice i pravca GH , a točka L sjecište pravaca AD i GH . Dokažite da vrijedi $|GK| = |HL|$.

Zadatak 5.

U tablici dimenzija $2n \times 2n$ upisani su prirodni brojevi od 1 do 10, pri čemu su brojevi u poljima sa zajedničkim vrhom relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji se u tablici pojavljuje barem $\frac{2n^2}{3}$ puta.