Simulacija Hrvatske matematičke olimpijade

25. svibnja 2020.

Zadatak 1.
Neka su dani $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ takvi da su svi u parovima različiti. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} > \frac{1}{3}\left(\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2-c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2-a^2}\right)$$

Zadatak 2.
Neka je $n \in \mathbb{N}$. Na $2n$ x $2n$ ploči raspoređeno je nekoliko n x 1 i 1 x n figura tako da se međusobno ne preklapaju.
Nazovimo raspored figura na ploči **maksimalan** ako je nemoguće dodati novu figuru na način da ne preklapa one u prvobitnom rasporedu. Nađite najmanji k takav da postoji **maksimalan** raspored koji sadrži k figura.

Zadatak 3.
Dan je trokut $\triangle ABC$, neka su D, E, F redom nožišta visina iz vrhova A, B, C. Nadalje, neka je H ortocentar tog trokuta, M polovište dužine $\overline{AH}$ i N sjecište pravaca AD i EF. Pravac kroz A paralelan s BM siječe BC u P. Dokaži da polovište dužine $\overline{NP}$ leži na AB.

Zadatak 4.
Odredite najveći prirodan broj n takav da za svaki $k \leq \frac{n}{2}$ postoje dva pozitivna djelitelja od n s razlikom k.