

Kvanta Olympiad 2021.

KVANTA

SENIORSKA KATEGORIJA

1. Neka je n prirodan broj. Dana je ploča dimenzija $n \times n$ s nekim poljima izrezanim tako da nijedna dva izrezana polja nemaju zajedničku stranu. Je li uvijek moguće smjestiti n šahovskih topova na ostatak ploče tako da se oni međusobno ne napadaju ako je:

- (a) $n = 20$
(b) $n = 19$?

Napomena: top se u šahu pomiče okomito i vodoravno za neograničen broj polja.

2. Realni brojevi a_1, a_2, \dots, a_{100} zapisani su u krug tako da za svaki $1 \leq i \leq 100$ vrijedi $5a_{i+2} = 4a_{i+1} + 3a_i$ (pri čemu je $a_{101} = a_1$ i $a_{102} = a_2$).

Dokažite da vrijedi:

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{99}a_{100} + a_{100}a_1 = 0$$

3. U trokutu $\triangle ABC$ pravac paralelan sa AC siječe stranice \overline{AB} i \overline{BC} redom u točkama A_1 i C_1 . Simetrala kuta $\angle ABC$ siječe A_1C_1 u K . Neka su X i Z redom sjecišta pravaca AK i CK sa opisanom kružnicom trokuta $\triangle ABC$, različita od A i C . Dokažite da se četverokutu A_1XZC_1 može opisati kružnica.

4. Neka je $n \leq 100$ prirodan broj. Na ploči je slijeva nadesno napisano 101 brojeva:

$$0 \cdot n \bmod 101, 1 \cdot n \bmod 101, \dots, 100 \cdot n \bmod 101$$

Koliko ima parova susjednih brojeva takvih da je lijevi veći od desnog? ($a \bmod b$ označava ostatak koji dobijemo pri dijeljenju broja a brojem b te se nalazi između 0 i $b - 1$).

5. Zadano je nekoliko prirodnih brojeva većih od 1. Za bilo koja dva zadana broja m i n ($m > n$) vrijedi da je $m - 1$ djeljiv sa n ili je m djeljiv sa n . Dokažite da među tim brojevima postoji broj koji je djeljiv sa svim ostalim brojevima ili da je moguće obojati te brojeve crno i bijelo tako da se koriste obje boje, a da pritom ne postoje dva broja različite boje takva da je jedan od njih djeljiv drugim.
6. Darboux ima dvije identične kutije oblika kvadra, obje do kraja napunjene ciglama. Sve su cigle oblika kvadra, mogu biti različitih dimenzija i način na koji su posložene u kutijama može biti različit. Na svaku ciglu u prvoj kutiji napisao je broj $V_1 \cdot h$, pri čemu je V_1 volumen cigle, a h je najmanja od udaljenosti vrhova te cigle do dna kutije. Slično, na svaku ciglu u drugoj kutiji napisao je broj $V_2 \cdot h$, pri čemu je V_2 volumen cigle, a h je najveća od udaljenosti vrhova cigle te do dna kutije.

Dokažite da je zbroj brojeva napisanih na ciglama u prvoj kutiji manji ili jednak od zbroja brojeva napisanih na ciglama u drugoj kutiji.