

Kvanta Olympiad 2021.

KVANTA

SREDNJA KATEGORIJA

1. Ukupna dob Viktorijine kćeri i dva sina jednaka je njezinoj dobi. Za nekoliko godina ukupna dob dvojice sinova bit će jednaka Viktorijinoj dobi. Koliki će biti omjer godina kćeri tada i danas?
2. Neka je n prirodan broj. Dana je ploča dimenzija $n \times n$ s nekim poljima izrezanim tako da nijedna dva izrezana polja nemaju zajedničku stranu. Je li uvijek moguće smjestiti n šahovskih topova na ostatak ploče tako da se oni međusobno ne napadaju ako je:
 - (a) $n = 20$
 - (b) $n = 19$?

Napomena: top se u šahu pomiče okomito i vodoravno za neograničen broj polja.

3. Kažemo da je broj *lagan* ako u svom dekadskom zapisu sadrži točno dvije jedinice, a ostale znamenke su mu nule. Dokaži da je moguće pomnožiti nekoliko laganih brojeva (ne nužno različitih) tako da u dekadskom zapisu njihovog umnoška postoji barem 2019 pojava znamenke '9'.
4. Neka je $n \leq 100$ prirodan broj. Na ploči je slijeva nadesno napisano 101 brojeva:

$$0 \cdot n \bmod 101, 1 \cdot n \bmod 101, \dots, 100 \cdot n \bmod 101$$

Koliko ima parova susjednih brojeva takvih da je lijevi veći od desnog? ($a \bmod b$ označava ostatak koji dobijemo pri dijeljenju broja a brojem b te se nalazi između 0 i $b - 1$).

5. Dana je beskonačna ploča čija polja su kvadratići kojima je duljina stranica 1. Svaka je stranica obojana plavom ili žutom bojom. Plavo obojanih stranica je konačno mnogo. Kažemo da su stranice *susjedne* ako dijele vrh. Svake sekunde sve stranice koje imaju paran broj plavih susjeda postanu žute, a sve stranice s neparnim brojem plavih susjeda postanu plave. Dokaži da će nakon svake sekunde postojati plava stranica ako i samo ako nakon prve sekunde postoji plava stranica.
6. U šiljastokutnom trokutu $\triangle ABC$ kut $\angle BCA$ iznosi 80° . Na stranici BC odabrana je točka X takva da je $|BX| = |AC|$ i $\angle BAX = 45^\circ$. Nadalje, neka je točka D unutar $\triangle ABC$ takva da je $\angle ABD = 40^\circ$ i $|CD| = |AX|$. Kolika je veličina kuta $\angle BDC$?