Simulacija državnog natjecanja za 1. razred

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

18. travnja 2021.

1. Odredite sve $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= xy + xz + yz + 1 \\ y^2 + 4(z^2 + 1) &= 2x^2. \end{aligned}$$

2. Nađite sve prirodne brojeve x, y i z takve da je

$$3^x - 5^y = z^2.$$

3. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 8$. Dokažite da je

$$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geq 6.$$

4. Dan je konveksan četverokut $ABCD$ u kojem vrijedi $\angle ABC = 90°$ i $\angle BAD = \angle ADC = 80°$. Na stranicama BC i AD četverokuta, nalaze se točke N i M takve da je $\angle CDN = \angle ABM = 20°$. Ako je $MD = AB$, odredite mjeru kuta $\angle MNB$.

5. U nogometnom turniru, svaki tim igra točno jednu utakmicu sa svakim drugim timom. Pobjednik utakmice dobiva 3 boda, gubitnik 0 bodova, a ako utakmica završi neriješeno, svaki tim dobiva po 1 bod. Poznato je da je n timova sudjelovalo u turniru i da završni broj bodova timova čini aritmetički niz[1], pri čemu zadnji tim ima samo jedan bod. Za koje prirodne brojeve n postoji ovakav turnir?

[1] Niz a_1, a_2, ... je aritmetički ako vrijedi $a_{i+1} - a_i = d$ za svaki $i \geq 2$, odnosno, ako je razlika uzastopnih članova niza konstantna.