

Simulacija državnog natjecanja za 3. razred

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

18. travnja 2021.

1. Za kompleksne brojeve $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ neka je $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$ skup takav da je izraz $M = \left| \sum_{i \in S} z_i \right|$ maksimalan. Dokaži da tada vrijedi:

$$\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n |z_i| \leq M.$$

2. Dokaži da je za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n broj $\left\lfloor \frac{2021^n}{n} \right\rfloor$ neparan.
3. Neka je $d(n)$ broj djelitelja broja n , a $\sigma(n)$ njihova suma. Dokaži da

$$\frac{\sigma(n)}{d(n)} \geq \sqrt{n}.$$

4. Neka je $\triangle ABC$ takav da vrijedi $|AB| = |AC|$. Neka su točke P i Q na stranicama AB i AC redom, tako da vrijedi $|AP| = |CQ|$. Simetrala stranice PQ siječe pravac BC u M . Dokaži da $\angle BAC = \angle PMQ$.
5. U državi je n gradova od kojih su neki povezani dvosmjernim cestama. Kažemo da su gradovi susjedni ako su povezani cestom. Ako za svaka 2 nesusjedna grada vrijedi da je njihov ukupan broj cesta veći od n , dokaži da možemo krenuti iz nekog grada i posjetiti sve gradove točno jednom bez da 2 puta koristimo istu cestu.