

# Simulacija državnog natjecanja za 4. razred

MLADI NADARENI MATEMATIČARI MARIN GETALDIĆ

18. travnja 2021.

1. Odredi sve funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju

$$f(x^3 + y^3) = x^2 f(x) + y f(y^2)$$

za sve  $x, y \in \mathbb{R}$ .

2. Dokaži da je za beskonačno mnogo prirodnih brojeva  $n$  broj  $\left\lfloor \frac{2021^n}{n} \right\rfloor$  neparan.
3. Neka je  $d(n)$  broj djelitelja broja  $n$ , a  $\sigma(n)$  njihova suma. Dokaži da

$$\frac{\sigma(n)}{d(n)} \geq \sqrt{n}.$$

4. Neka je  $\triangle ABC$  takav da vrijedi  $|AB| = |AC|$ . Neka su točke  $P$  i  $Q$  na stranicama  $AB$  i  $AC$  redom, tako da vrijedi  $|AP| = |CQ|$ . Simetrala stranice  $PQ$  siječe pravac  $BC$  u  $M$ . Dokaži da  $\angle BAC = \angle PMQ$ .
5. U državi je  $n$  gradova od kojih su neki povezani dvosmjernim cestama. Kažemo da su gradovi susjedni ako su povezani cestom. Ako za svaka 2 nesusjedna grada vrijedi da je njihov ukupan broj cesta veći od  $n$ , dokaži da možemo krenuti iz nekog grada i posjetiti sve gradove točno jednom bez da 2 puta koristimo istu cestu.