Simulacija županijskog natjecanja
8. razred

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"
27. veljače 2023.

1. Odredite sve realne brojeve a, b, c koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = \frac{b+c}{2} \\ b^2 + 3b + 1 = \frac{a+c}{2} \\ c^2 + 3c + 1 = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

2. Simetrala unutrašnjeg kuta kod vrha A trokuta ABC siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Neka je E točka na stranici $\overline{AB}$ pri čemu je $\angle ADB = 94°, \angle ACE = 38°$ i $\angle CEB = 84°$. Odredite poredak stranica $\triangle ABC$ po duljini.

3. Neka je broj $123456789101112131415\ldots20222023$ dobiven tako da smo brojeve od 1 do 2023 napisali jedan za drugim. Koliki je ostatak pri dijeljenju tog broja s 9?

4. U trokutu ΔABC je $\beta = 2\alpha$. Dokažite da za stranice trokuta vrijedi $b^2 - a^2 = ac$.

5. Matej slaže pločice u niz. Na raspolaganju ima neograničenu količinu plavih pločica dimenzije 1×1, crvenih 1×2 i zelenih 1×3. Pločice koje su iste boje smatramo identičnim. Na koliko načina Matej može popločati pod dimenzije 1×15 ako je poznato da se između svake dvije pločice iste boje ne smije nalaziti nijedna pločica druge boje?

Simulacija županijskog natjecanja
1. razred

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"
27. veljače 2023.

1. Odredite sve realne brojeve a, b, c koji zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{cases} a^2 + 3a + 1 = \frac{b+c}{2} \\ b^2 + 3b + 1 = \frac{a+c}{2} \\ c^2 + 3c + 1 = \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

2. Odredite sve parove prostih brojeva $p \leq q$ tako da je

$$p^q q^p + 1$$

također prost broj.

3. U zavisnosti o realnom parametru p riješite sljedeću jednadžbu

$$|x - 1| + |x + 2| = p - 2x.$$

4. Matej slaže pločice u niz. Na raspolaganju ima neograničenu količinu plavih pločica dimenzije 1×1, crvenih 1×2 i zelenih 1×3. Pločice koje su iste boje smatramo identičnim. Na koliko načina Matej može popločati pod dimenzije 1×15 ako je poznato da se između svake dvije pločice iste boje ne smije nalaziti nijedna pločica druge boje?

5. Zadan je trokut $\triangle ABC$ kojem je opisana kružnica k. Neka su k_1, k_2, k_3 preslike k preko pravaca BC, CA, AB redom. Neka je ω_1 kružnica koja prolazi kroz A, drugo sjecište k_2 s pravcem AB (koje nije A), te drugo sjecište k_3 s pravcem AC (koje nije A). Analogno, neka je ω_2 kružnica koja prolazi kroz B, drugo sjecište k_1 s AB, te drugo sjecište k_3 s BC; te ω_3 kružnica koja prolazi kroz C, drugo sjecište k_1 s AC, te drugo sjecište k_2 s BC. Dokažite da su kružnice $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ jednakog polumjera.

Simulacija županijskog natjecanja
2. razred

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"
27. veljače 2023.

1. Odredite najveću moguću vrijednost koju razlomak

$$\frac{2x^2+2x+3}{x^2+x+1}$$

može poprimiti za $x \in \mathbb{R}$.

2. Odredite realan parametar p takav da jednadžba

$$\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=p$$

ima jedinstveno rješenje.

3. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle ABC > 90°$, odnosno $|AC| > |BD|$. Opisana kružnica trokuta BCD siječe dijagonalu $\overline{AC}$ po drugi put u točki M. Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima ABM i ADM.

4. U polja tablice 5×4 upisano je 20 različitih prirodnih brojeva. Polja nazivamo susjednim ukoliko imaju zajedničku stranicu. Poznato je da brojevi koji se nalaze u susjednim poljima tablice **nisu** relativno prosti. Neka je M najveći broj u tablici. Odredite najmanju moguću vrijednost broja M.

5. U skupu cijelih brojeva riješite

$$a^2+b=b^{2022}.$$

Simulacija županijskog natjecanja
3. razred

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"
27. veljače 2023.

1. Odredite sve realne x i y tako da vrijedi:

$$y^{5x^2-51x+10}=1$$

$$2\log x+2\log y=\log 9+\log 25.$$

2. Neka su a,b,c realni brojevi. Dokažite da postoji realan broj x takav da je $a\sin x+b\cos x=c$ ako i samo ako je $a^2+b^2\geq c^2$.

3. Za $n\in\mathbb{N}$ definiramo sljedeći sustav diofantskih jednadžbi:

$$x^2+ny^2=z^2$$
$$nx^2+y^2=t^2.$$

a) Dokažite da za beskonačno mnogo n sustav ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja.

b) Dokažite da za beskonačno mnogo n sustav nema cjelobrojnih rješenja.

4. Neka je n prirodan broj. Boris želi popločati ploču $(2n+1)\times(2n+1)$ pločicama. Na raspolaganju ima točno dvije okomite i točno dvije vodoravne pločice dimenzija $1\times k$ za svaki paran broj k između 1 i $2n+1$, te točno jednu pločicu dimenzija 1×1. Pločice istih dimenzija smatramo identičnim, te pločice nije dozvoljeno okretati. Na koliko načina Boris može ostvariti svoj cilj?

5. Zadan je trokut $\triangle ABC$ kojem je opisana kružnica k. Neka su k_1,k_2,k_3 preslike k preko pravaca BC,CA,AB redom. Neka je ω_1 kružnica koja prolazi kroz A, drugo sjecište k_2 s pravcem AB (koje nije A), te drugo sjecište k_3 s pravcem AC (koje nije A). Analogno, neka je ω_2 kružnica koja prolazi kroz B, drugo sjecište k_1 s AB, te drugo sjecište k_3 s BC; te ω_3 kružnica koja prolazi kroz C, drugo sjecište k_1 s AC, te drugo sjecište k_2 s BC. Dokažite da su kružnice $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ jednakog polumjera.

Simulacija županijskog natjecanja
4. razred

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"
27. veljače 2023.

1. Neka su a, b, c prirodni brojevi. Dokažite da ne mogu svi od izraza $a^2 + b + c$, $b^2 + a + c$, $c^2 + a + b$ biti kvadrati cijelog broja.

2. Mislav je odlučio štap duljine 1m prerezati na dva nasumična mjesta tako da dobije tri kraća štapa. Koja je vjerojatnost da može spojiti štapove tako da čine trokut?

3. Neka su $z_0, z_1, \dots, z_n$ kompleksni brojevi za koje vrijedi

$$(k+1)z_{k+1} - i \cdot (n-k)z_k = 0, \text{ za sve } k \in 0, 1, \dots, n-1.$$

Odredite z_0 takav da vrijedi

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_n = 2^n.$$

4. Zadan je trokut $\triangle ABC$ kojem je opisana kružnica k. Neka su k_1, k_2, k_3 preslike k preko pravaca BC, CA, AB redom. Neka je ω_1 kružnica koja prolazi kroz A, drugo sjecište k_2 s pravcem AB (koje nije A), te drugo sjecište k_3 s pravcem AC (koje nije A). Analogno, neka je ω_2 kružnica koja prolazi kroz B, drugo sjecište k_1 s AB, te drugo sjecište k_3 s BC; te ω_3 kružnica koja prolazi kroz C, drugo sjecište k_1 s AC, te drugo sjecište k_2 s BC. Dokažite da su kružnice $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ jednakog polumjera.

5. Neka je $k \in \mathbb{N}$ funkcija $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja

$$f_k(x) = \frac{1}{k}(\sin^k x + \cos^k x).$$

Odredite sve parove prirodnih brojeva (m, n) takvih da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja $g(x) = f_m(x) - f_n(x)$ konstantna funkcija, tj. vrijednost funkcije ne ovisi o x.