

---

# Učenički radovi - prijedlozi tema

MATEMATIČKA KONFERENCIJA ZA UČENIKE 2024.

---

MLADI NADARENI MATEMATIČARI



Marin Getaldić

I ove godine imate priliku samostalno raditi na određenoj temi i prezentirati svoj rad ostalim sudionicima Konferencije. Na odabranoj temi, ako želite, možete raditi i sa svojim profesorima i mentorima. Mentori Udruge MNM također će biti na raspolaganju za bilo kakva pitanja, smjernice, literaturu i slično. U nastavku se nalazi popis nekih potencijalnih tema za radove uz kratke opise i primjer prijave rada. Predložene teme su okvirne i služe kao ideja. Ne morate, ali možete, odabrati cijelu ponuđenu temu, a možete odabrati i samo dio teme koji vas više zanima i koji ćete detaljnije obraditi u radu. Svoje radove možete prijaviti do **15.5.2024.**

Pri prijavi rada potrebno je objasniti o čemu je vaš rad, tj. koji dio ponuđene teme želite detaljnije obraditi (ovo je posebno važno za opširne i neodređene teme poput Statističkog istraživanja). Objašnjenje je rada ključno ako ste izabrali temu koja nije ponuđena. Uz prijavu rada možete odabrati i željeno trajanje prezentacije na Konferenciji, pri čemu su ponuđena trajanja 15, 30 i 45 minuta.

Zbog ograničenog trajanja Konferencije, možda nećemo biti u mogućnosti prihvatiti sve prijavljene radove. U prijavnici možete prijaviti do 3 rada, ali primamo i dodatne prijedloge i prijave radova direktno na naš mail [konferencija@mnm.hr](mailto:konferencija@mnm.hr). Imajte na umu da ćemo vjerojatno izabrati samo jedan rad po osobi te da, ako rad izaberemo, očekujemo da ga prezentirate na Konferenciji. Informaciju o prihvaćanju radova poslat ćemo u najkraćem mogućem roku.

Od učenika čiji radovi budu izabrani očekujemo da do 1.7. pripreme opis svog rada detaljniji od onoga u prijavnici i time ujedno potvrde svoj dolazak. Također, do 1.8. očekujemo da nam pošalju sažetak cijele prezentacije koji ćemo objaviti u biltenu Konferencije (barem pola stranice A4, pogledajte [bilten Matematičke konferencije za učenike 2023.](#) i [opise projekata sa Zimske škole matematike 2023.](#)) i popis korištene literature. Učenici koji uz prezentaciju dodatno pišu tekst esejskog tipa mogu nam i to poslati. Osim spomenutog, pitanja i materijale nam na provjeru možete slati bilo kada.

## Teme

### 1. Trikovi s kartama

UKRATKO O TEMI: Mnogi mađioničarski trikovi, a posebice trikovi s kartama, često imaju neku matematičku podlogu. Najčešće su to kombinatorika ili teorija brojeva.

#### PRIMJERI

- "1 in 362,880", "Partner trick", "2 4 13 – boja, znak, broj"
- Jack the Bounty Hunter, Final three, Black-red
- Matching pairs, Down-over trik, Chatty Jokers

#### PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Što su to permutacije? Koliko postoji permutacija u kojima špil karata može biti?
- Koji su vam najdraži trikovi s kartama? Možete li dokazati da se uvijek mogu izvesti?
- Koje još trikove možete sami smisliti?

## 2. Platonova tijela

UKRATKO O TEMI: Platonova su tijela pravilni konveksni poliedri kojima su sve strane sukladni pravilni mnogokuti i iz svakog vrha izlazi jednak broj bridova. Unatoč imenu, nije ih otkrio Platon, nego su poznata od davnina, a najviše su ih proučavali Arhimed, Pitagora i Teetet, kojem se pripisuje prvi dokaz da su to jedina takva tijela.

PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Koja su Platonova tijela? Zašto ih ne postoji više?
- Kakve ćemo oblike dobiti ako spojimo središta susjednih stranica Platonovih tijela?
- Kakva su to Arhimedova tijela? Koliko ih postoji? Kako nastaju iz Platonovih tijela?
- Koji bi bili ekvivalenti Platonovih tijela u ravnini? Na pravcu? Što s tijelima u višim dimenzijama?
- Koje strukture možete pronaći u prirodi koje nalikuju Platonovim tijelima? Što mislite zašto nastaju baš tako?
- U kojim kemijskim strukturama, organskim i anorganskim, možete pronaći vezivanja slična Platonovim tijelima? Koja su svojstva tih spojeva?

## 3. Najbolja kutija

UKRATKO O TEMI: Problemi optimizacije neizbježni su u današnjem društvu, često se javljaju, na primjer, u transportu. "Najbolji" je način vrlo uglavnom teško odrediti zbog raznih postavljenih zahtjeva koji nerijetko isključuju jedni druge.

PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Kako biste osmislili lik najveće površine za dani opseg? Kako biste osmislili tijelo najvećeg volumena za fiksno oplošje?
- Što ako imate kvadrat (ili pravokutnik) iz kojeg trebate izrezati plašt za kutiju najvećeg mogućeg volumena?
- Kako biste pakirali krugove u pravokutnik ili kugle u kvadar? Koje biste druge likove ili tijela probali pakirati?
- Kako biste dizajnirali najbolju konzervu (tj. koja ima najveći volumen), ali da je pritom potrebnog materijal što manji (tj. oplošje je najmanje)?
- Pod kojim uvjetima možete u pravokutnik spakirati manje sukladne pravokutnike tako da ne ostane praznog prostora? Koliko najviše kvadrata stranice 1 možete spakirati u kvadrat zadanih realnih dimenzija?
- Koji je po vama najbolji način pakiranja? Kako biste spakirali svoj kofer za Konferenciju?

## 4. Origami

UKRATKO O TEMI: Origami je japanska umjetnost savijanja papira s bogatom poviješću. Koristi se u mnogim prilikama, bilo kao dekoracija pa sve do religijskih obreda - jedno od vjerovanja je da ukoliko tko uspije napraviti 1000 ždralova, mitološki će mu ždral ispuniti jednu želju.

PRIMJERI

- "Gatalica"
- Razni biljni motivi (najpoznatiji je vjerojatno cvijet lotusa)

- Razne životinje (najpoznatiji je vjerojatno origami ždral)
- Šeširi, brodovi, avioni...

#### PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Što možete reći o načinu izrade origamija? Koje "elementarne" operacije postoje?
- Možete li prepoloviti dužinu ili kut? A podijeliti ih na tri dijela? Na koliko ih je onda još dijelova moguće podijeliti?
- Možete li izraditi neko Platonovo tijelo (vidi 2)? Koje još origamije možete izraditi?
- Kako biste riješili kvadratnu jednadžbu pomoću origamija? Koje još probleme možete riješiti?

## 5. Biljar

UKRATKO O TEMI: *"Biljar je najsuptilnija igra perfekcije i logičnosti, satkana od šahovske kombinatorike, zakona fizike i izvanredne povezanosti čovječjeg uma i tjelesne motorike."* (Nikola Tesla)

#### PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Možete li odrediti točnu putanju jedne kugle pod pretpostavkom savršenih uvjeta? Kako putanja ovisi o kutu pod kojim se kugla približava rubu stola? Kako ovisi o obliku stola, npr. krug, kvadrat, elipsa, trokut?
- Što ako uvjeti nisu savršeni, npr. u obzir uzmemo trenje ili rotaciju kugle? Možete li matematički opisati sudar dvije kugle? Možete li opisati ulančane sudare?
- Možete li odrediti sve parametre udarca kako biste ostvarili željeni pogodak?

## 6. Kako rade kalkulatori?

UKRATKO O TEMI: Kalkulator ili džepno računalo naprava je koja omogućava brzo i jednostavno računanje kompliciranih matematičkih izraza. Svako računalo, pa tako i kalkulator, ima neku količinu memorije i mogućnost izvršavanja osnovnih logičkih operacija, a preko njih imitiraju se sve ostale aritmetičke operacije. Brojevi se u memoriji najčešće prikazuju pomoću binarnog sustav jer memorijske lokacije mogu poprimiti samo dva stanja, označavamo ih s 0 i 1.

#### PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Kako zapisati brojeve u računalu? Kako biste zapisali prirodne, cijele, racionalne, a kako realne brojeve?
- Što je greška zapisa? Kako se greška ponaša s obzirom na osnovne računske radnje? Što je to *katastrofalno kraćenje*?
- Za koje operacije znate jednostavno smisliti upute koje računalo može izvesti? Kako biste procijenili vrijednosti ostalih operacija, odnosno funkcija?
- Možete li poboljšati složenost nekog algoritma (za više informacija pogledajte Algoritme 11)? Npr. kako biste izračunali umnožak dvaju velikih brojeva, korijen, potenciju s velikim eksponentom...

## 7. Kriptografija

UKRATKO O TEMI: Ljudi su još od izuma pisma željeli sigurno komunicirati, no jasno je da poruke često putuju nesigurnim komunikacijskim kanalima kojima možda upravlja ili ih prisluškuje neprijatelj. Ovaj je problem posebice bio aktualan tijekom 2. svjetskog rata, poznata je priča o probijanju Enigme. Danas su sve bitniji algoritmi šifriranja na internetu i u komunikaciji među računalima.

## PRIMJERI ŠIFRI

- Cezarova, afina, Vigenierova
- supstitucijske šifre, transpozicijske šifre
- Playfaira, Hillova

## PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Što je kriptografija? Koji su bitni elementi i operacije korištene pri šifriranju?
- Kakvi su se sve "fizički" načini šifriranja pojavili kroz povijest?
- Možete li šifrirati ili dešifrirati neki tekst korištenjem navedenih primjera šifri? Na koje sve načine možete pristupiti dešifriranju teksta ako ne znate o kojem se načinu šifriranja radi? Kako napasti šifrat?
- Što je to Handshake protokol i kako funkcionira? Čemu služi?
- Kako radi RSA algoritam? Kako se na internetu osigurava sigurna komunikacija među računalima? Kako rade i zašto postoje kriptovalute?

## 8. Kartografija

UKRATKO O TEMI: Zemljina površina približno je oblika sfere, a kako je prikazati u ravnini papira problem je kojim se ljudi bave od početaka povijesti. Jasno, savršeni prikaz nije moguć, stoga je pri izradi karte važno odabrati koje elemente želimo naglasiti.

## PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Što su geografske širina i dužina? Zašto se izražavaju u stupnjevima i što predstavljaju?
- Jesu li karte vjeran prikaz Zemljine površine? Koje su prednosti karata koje prikazuju manje, a koje karata koje prikazuju veće područje?
- Što su kartografske projekcije? Koji su njihovi nedostaci? Kako ih možemo klasificirati? Možete li ih usporediti po nekim karakteristikama?
- Koja je jednadžba sfere? Kako možemo točno izračunati udaljenosti točaka na sferi? Kako možemo izračunati kut između dvije kružnice na sferi? Jesu li sve kružnice na sferi jednakog radijusa?
- Postoji li trokut kojemu su svi kutevi pravi?
- Kako pomorci određuju i održavaju smjer kretanja broda? Zašto je Titanic potonuo?

## PRIMJERI KARTOGRAFSKIH PROJEKCIJA

- azimutalne, konusne, cilindrične
- Mercatorova, Fullerova, gnomonska
- ortografska, stereografska

## 9. Fraktali

UKRATKO O TEMI: Fraktali su samoslični geometrijski objekti, a najčešće se mogu dobiti ponavljanjem (iteriranjem) nekog određenog postupka. Javljaju se u teoriji kaosa, a primjenjuju se u računalnoj grafici, kompresiji slika, medicini itd. Mogu se pronaći u umjetnosti, prirodi, tehnologiji i arhitekturi. Kod fraktala je zanimljivo promatrati fraktalnu dimenziju koja ne mora biti prirodan broj. Možemo ih podijeliti na geometrijske i algebarske fraktale.

#### PRIMJERI GEOMETRIJSKIH FRAKTALA

- Kochova krivulja, Kochova pahuljica, Sierpinskijev trokut
- Cantorov skup, Cantorova prašina, Cantorov oblak
- Hilbertova krivulja, Peanova krivulja, zmajolika krivulja
- Pitagorino stablo, Hexaflake

#### PRIMJERI ALGEBARSKIH FRAKTALA

- Julijin skup, Mandelbrotov skup
- gorući brod

#### PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Koje su glavne karakteristike fraktala? Na koje načine mogu nastati?
- Na koji način možemo izračunati fraktalnu dimenziju? Kako je ona definirana? Možete li odrediti fraktalnu dimenziju nekih fraktala?
- Možete li konstruirati vlastiti fraktal? Koji su vam još zanimljivi i lijepi primjeri fraktala?
- Gdje se u prirodi javljaju fraktali? Možete li pronaći fraktale u umjetnosti i arhitekturi? Kakve su primjene fraktala? Kakve veze ima mjerenje duljine obale s fraktalima?
- Kako nastaju algebarski fraktali? Kako je definiran Mandelbrotov skup? Gdje se u Mandelbrotovom skupu javlja Fibonaccijev niz? Možete li pomoću Mandelbrotovog skupa aproksimirati  $\pi$ ?

## 10. Matematika i glazba

UKRATKO O TEMI: Teorija glazbe proučava ritam, odnose visina tonova i strukturu glazbenih djela. Iako naizgled potpuno nepovezani, glazbena teorija matematički opisuje primjerice tempo, progresije akorda, glazbeni oblik i mjeru. Očitou povezanost matematike i glazbe uočavamo i na primjerima matematičara-glazbenika Alberta Einsteina, Arta Garfunkela, Briana Mayja ili Donalda Knutha.

#### PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Kako nastaje ton? Kako štimamo različite instrumente? Zašto glazbeni instrumenti zvuče različito?
- Zašto koristimo baš 12 različitih tonova? Kakve vrste glazbenih ljestvica postoje? Koje se međusobno razlikuju i kako?
- Što je kvintni krug? Uočavate li neke pravilnosti?
- Kakvi su konsonantni, a kakvi disonantni intervali? Koji su konsonantni, a koji disonantni akordi? Koje sve kvintakorde razlikujemo? U kojoj su vezi ostali poznati akordi od 3 tona s kvintakordima? Kakva je situacija s akordima od 4 tona? Možete li smjestiti akorde na Möbiusovu traku?
- Kako je organiziran i kako se zapisuje različit ritam u glazbi? Što je mjera i u kakvom je odnosu s ritmom?
- Što je matematički pojam grupe i kakve ima veze s teorijom glazbe? Možete li smjestiti Beethovena na torus?
- Koje sve glazbene oblike razlikujete? Kakve simetrije uočavate u njima?
- Gdje u glazbi možete pronaći Fibbonacijeve brojeve?
- Javlja li se u nekom glazbenom djelu nakon određenog tona uglavnom istih nekoliko tonova? Možete li odrediti vjerojatnost da nakon  $C$  dođe  $D$  ili  $G$ ? Ovisi li to o tome kakva je bila progresija koja je dovela u  $C$ ?

# 11. Algoritmi

UKRATKO O TEMI: Algoritam je niz uputa za rješavanje nekog problema ili postizanje nekog cilja. Susrećemo ih svakodnevno, ali najčešće o njima razmišljamo kao o nečemu vezanom uz računala. Iako nas mnogi algoritmi mogu dovesti do željenog rješenja, posebno nas zanimaju efikasni i brzi algoritmi. Neke poznate metode oblikovanja algoritama su "podijeli pa vladaj", dinamičko programiranje, pohlepni pristup, backtracking i lokalno traženje. Algoritmima često pokušavamo riješiti probleme koji uključuju grafove, apstraktne strukturame sastavljene od vrhova i bridova među njima.

## PRIMJERI

- Euklidov algoritam, Eratostenovo sito
- Hornerov algoritam, brzo potenciranje
- BFS, DFS, topološko sortiranje
- Dijkstrin algoritam, Bellman-Ford algoritam, Floyd-Warshall algoritam
- problem trgovačkog putnika
- minimalno razapinjuće stablo grafa
- algoritmi za sortiranje: selection sort, bubble sort, insertion sort, merge sort, quick sort, heap sort
- rekurzivni algoritmi
- Google page rank

## PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Koje algoritme koristite u svakodnevnom životu? Možete li navesti neke neočekivane primjere? Na koji način možemo zapisivati algoritme?
- Koje su razlike između navedenih metoda oblikovanja algoritama? Garantira li neka metoda postojanje najboljeg rješenja? Koje su prednosti i mane tih metoda?
- Kako u dućanu platiti određenu cijenu s najmanjim mogućim brojem kovanica i novčanica? Kako bi se taj problem promijenio da su kovanice ili novčanice drukčijih vrijednosti?
- Na koje sve načine možete postaviti 8 kraljica na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?
- Što je složenost nekog algoritma i kakve sve složenosti postoje? Kako se određuju?
- Koje načine provedbe Euklidovog algoritma možete smisliti? Koji su najgori slučajevi? Koja je "prosječna" složenost?
- Kako možemo pronaći najkraći put između dva vrha grafa? Što ako dopustimo da udaljenosti budu negativne?
- Koju biste rutu preporučili Djedu Mrazu kako bi obišao svu djecu svijeta u što kraćem vremenu?
- Koji su najbolji algoritmi za sortiranje? Na kakvim podacima su ti algoritmi "loši"? Postoje li algoritmi koji su bolji za određene tipove podataka?
- Na koji način vam društvene mreže preporučuju objave i prijatelje? Kako Google odabire koje stranice će vam prikazati na vrhu prilikom pretraživanja?

## 12. Statističko istraživanje

UKRATKO O TEMI: Statistika je grana matematike koja se bavi analizom podataka. Jedan od ciljeva statističke analize je donošenje zaključka o većoj populaciji na temelju nekog manjeg reprezentativnog uzorka. Često su korisni jednostavni grafički prikazi i analize frekvencija. Podatke možemo prikupiti anketama i provođenjem istraživanja, a možemo raditi analize i na postojećim dostupnim podacima. Jedna od poznatih baza podataka nalazi se na [web stranici Kaggle](#). Statistika je također vrlo bitan alat u strojnom učenju.

PITANJA KOJA BISTE SE MOGLI PITATI

- Što je uzorak, a što populacija? Kakav je to reprezentativan uzorak? Možemo li nešto zaključiti o svim ljudima u Hrvatskoj na temelju podataka o maturantima jedne škole? Kakve vrste podataka postoje?
- Je li bitan broj podataka za statističku analizu? Koliko je podataka dovoljno da donesemo valjan zaključak? Što ako se dio dobivenih podataka jako razlikuje od ostatka? Što ako u anketi netko ne da odgovor na pitanje pa nam tako izostanu podaci?
- Koji je udio nekog obilježja u promatranom uzorku? Koji sve grafički prikazi postoje? Koji je najbolji grafički prikaz za određeni skup podataka?
- Što je metoda najmanjih kvadrata? Možemo li za uređene parove brojeva prikazane u koordinatnom sustavu pronaći pravac koji najbolje opisuje te podatke? Što ako imamo samo 2 takva uređena para, a što ako ih imamo više? Možemo li na sličan način pronaći parabolu koja najbolje opisuje podatke?
- Kako jedna vrsta podataka ovisi o drugoj? Možemo li ovisnosti promatrati samo za brođane podatke? Mora li ovisnost među podacima uvijek značiti da postoji i neka uzročno-posljedična veza?
- Što su train i test podaci? Kako odabrati veličinu train skupa podataka? Što je overfitting i zašto nije poželjan?

PRIMJERI TEMA ZA STATISTIČKO ISTRAŽIVANJE

- određivanje udjela osoba određenog imena u nekoj generaciji
- određivanje razdiobe boje očiju Hrvata
- proučavanje ovisnosti visine i težine srednjoškolaca u Hrvatskoj
- proučavanje rezultata na Međunarodnoj matematičkoj olimpijadi u ovisnosti o rezultatima PISA istraživanja
- predviđanje preživljavanja na Titanicu ([Titanic - Machine learning from Disaster](#))

## 13. Slobodna tema

Ukoliko vas zanima nešto što nismo pokrili ranije navedenim temama, slobodni ste izabrati bilo koju drugu temu koju smatrate prikladnom. Posebno vas potičemo da razmislite o temama primjene matematike u drugim STEM područjima, ali jednako tako i u svim ostalim znanostima ili svakodnevnom životu.

PRIMJERI PODRUČJA U KOJIMA MOŽETE PRIMIJENITI MATEMATIKU

- fizika, kemija, biologija
- financije, računarstvo
- humanističke znanosti

## Primjeri prijava teme za rad

Kod prijave rada bitno je da nam dobro objasnite što točno želite proučavati. Promotrimo jedan dobar prijedlog rada:

*GEOMETRIJSKI FRAKTALI (30 min)* — U svojem radu fokusirala bih se na geometrijske fraktale, ponajviše na krivulje. U uvodu bih objasnila što su geometrijski fraktali i kako računati fraktalnu dimenziju, a u razradi navela puno primjera i računala im dimenziju. Također bih iteracijom pokušala smisliti još neke krivulje i izračunala im fraktalnu dimenziju.

Odabrana je tema, određeno je realistično vrijeme trajanja i popisano je što bi se točno radilo.

Primjer još jednog dobrog prijedloga rada je:

*ISTRAŽIVANJE UTJEČE LI NAČIN JEDENJA KUKURUZA NA OMILJENI PREDMET U ŠKOLI (15 min)* — Kao što naslov kaže, u svojem bih radu istraživao utječe li način na koji netko jede kukuruz (uzduž ili poprijeko) na to je li mu draža matematika ili povijest. Podatke bih prikupio anonimnom anketom u razredu prije Konferencije te bih u anketu uključio i podatke poput dobi, spola. . . Zatim bih analizirao prikupljene podatke, prikazao ih grafički i pokušao zaključiti postoji li povezanost.

Primjer lošeg prijedloga koji bismo vjerojatno odbili je:

*ALGORITMI (15 min)* — Promotrio bih algoritme koje ste naveli u primjerima i odgovorio na pitanja iz obrasca.

Trajanje je (najvjerojatnije) krivo procijenjeno i nije jasno što bi točno rad proučavao. Također, naša su pitanja samo smjernice za rad i nipošto ne očekujemo dobiti odgovor na sva postavljena pitanja, ali očekujemo da i sami prirodno dođete do nekih pitanja (i odgovora) koja nismo postavili.