MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Matematička konferencija za učenike 2024.

Kaštel Štafilić,

4. - 9. 8. 2024.

Sadržaj

1. Uvod

1.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u sva područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji, uglavnom u svojim završenim srednjim školama. U takvim vrstama priprema posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.

Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija, a i svih ostalih najboljih matematičara u Hrvatskoj, u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše.

Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić".

Sastanak na kojem se formirala Udruga

Udruga se u početku bavila samo organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara i tjednih predavanja iz natjecateljskih tema u Zagrebu, no s vremenom se djelovanje Udruge proširilo i na druge aktivnosti poput organizacije zimskih škola, matematičkih konferencija za učenike, gostovanja Udruge u ostalim hrvatskim gradovima, školama diljem Hrvatske u svrhu popularizacije matematike ili natjecateljskih predavanja, sudjelovanje na mnogim konferencijama, natjecanjima i sajmovima...

Danas je Udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina, članovi Udruge dolaze iz dvadesetak različitih srednjih škola iz svih dijelova Hrvatske, a studiraju na desetak fakulteta širom svijeta.

O važnosti i ugledu Udruge svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta kao mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja, velik broj prijava učenika na naše kampove, povjerena organizacija važnih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, ali i samostalna organizacija matematičkog natjecanja "Europski matematički kup" u kojem sudjeluje više od 25 država diljem svijeta, a održava se već deset godina!

1.2. Povijest kampova

Ljetni kamp najveća je i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić". Kamp obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koji nastoje ostvariti svoje matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine, izvrsna organizacija i višegodišnje iskustvo starijih mentora omogućuju polaznicima Kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, a uz to uvijek ostaje vremena za zabavu i razonodu.

Ljetni kamp mladih matematičara 2024.

Nakon nekoliko godina uspješne organizacije Ljetnih kampova, početkom 2014. godine održana je prva Zimska škola matematike u Domu Crvenog križa na Sljemenu. Zimska je škola jako slična Ljetnom kampu, iako manja, a na nju dolaze najbolji natjecatelji kako bi se pripremili za sezonu natjecanja iz matematike koja započinje školskim natjecanjem početkom drugog polugodišta.

Konačno, 2018. godine osmišljena je Matematička konferencija za srednjoškolce kao nenatjecateljska verzija Ljetnog kampa u kojoj projekti zauzimaju i jutro i popodne svakog dana. Nažalost, organizacija Konferencije zamrla je tijekom pandemije, no obnovljena je 2023. godine!

Jedan od ciljeva svih kampova je povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampovima se održavaju i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

1.3. O MatKo 2024.

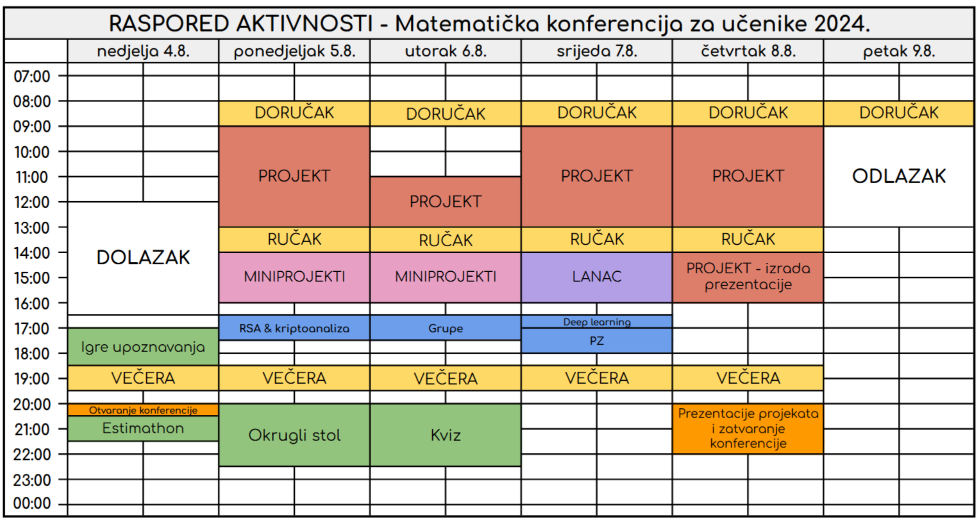
Matematička konferencija za učenike 2024. održala se u Učeničkom domu Srednje škole "Braća Radić" Kaštel Štafilić od 4. do 9. kolovoza 2024. Na ovogodišnjoj konferenciji sudjelovali su učenici od završenog 7. razreda osnovne škole do učenika završenog 3. razreda srednje škole iz cijele Hrvatske, ali i susjedne Bosne i Hercegovine; različitog predznanja i natjecateljskog iskustva.

Teško je prisjetiti se kako je sve to izgledalo sad već davne 2018. godine na prvoj matematičkoj konferenciji u organizaciji naše Udruge. Nažalost, zbog mnogih čimbenika, MatKo je svoje drugo izdanje čekao čak pet godina, no zato se nadamo da je ovogodišnjim izdanjem utemeljena i tradicija ove aktivnosti!

Proteklih nekoliko godina primijetili smo povećanje broja učenika koji se prijavljuju na Ljetni kamp, a u prijavi navode da ih zanimaju i druga STEM područja i primjena matematike. Osim toga, kroz popularizacijske radionice koje držimo već dulji niz godina u školama diljem Hrvatske primijetili smo sve veći broj učenika koji su zainteresirani za primjenu matematike, ali nisu za natjecateljsku matematiku. Zato smo prošle godine odlučili ponovno održati Matematičku konferenciju, a s obzirom na prošlogodišnji uspjeh i interes, svoje sljedeće izdanje konferencija je dobila već ovo ljeto.

Također, potaknuti izlaganjima i radionicama na "pravim" konferencijama, dajemo priliku učenicima da prezentiraju svoj rad ostalim sudionicima Konferencije. Ideja iza samostalnih radova je da se učenici prije Konferencije upoznaju s nekom temom koja im je zanimljiva, a zatim na Konferenciji naučeno prezentiraju ostalima. Više detalja o tome može se pronaći i u Uputama za prijavu za ovogodišnju Matematičku konferenciju.

Ove je godine Konferencija trajala pet noćenja, u odnosu na prošlogodišnja četiri noćenja za koja su svi sudionici smatrali prekratkim za kvalitetnu razmjenu znanja i iskustava. Ujutro su učenici imali priliku raditi na projektu primjene matematike u drugim znanostima, popodne su radili na miniprojektima koji su se više fokusirali na "čišću" matematiku te imali priliku čuti predavanja svojih vršnjaka, a večeri su bile rezervirane za nešto manje matematičke aktivnosti. Za učenike smo ove godine pripremili i nešto novo, timsko natjecanje *Lanac* na kojem su, podijeljeni na dvije starosne kategorije, odmjeravali snage rješavajući zabavne zadatke vezane uz matematiku u STEM znanostima.



Mentori na ovogodišnjoj Konferenciji bili su Luka Kraljević, Mislav Plavac, Lucija Relić, Matej Vojvodić i Martin Vrbovčan.

2. Projekti na Konferenciji

2.1. O projektima

Prijepodneva na Konferenciji bila su rezervirana za rad na projektima (ukupno 14 sati) u grupama od 5 učenika koji su podijeljeni po dobi, predznanju i interesima. Na projektima su učenici od mentora čuli neke nove zanimljive stvari koje su potom zajedničkim snagama pokušali primijeniti na konkretnim problemima. Svaki učenik sudjelovao je na jednom projektu, a na ovogodišnjoj su Konferenciji bila ponuđena sveukupno tri projekta.

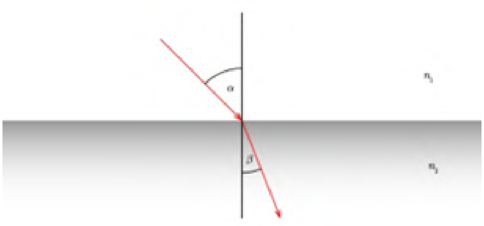
2.2. Popis projekata

2.2.1. Optika

Mentor: Mislav Plavac

U ovom projektu smo se bavili područjem fizike zvanim optika. Optika je grana fizike koja se bavi svojstvima i širenjem svjetlosti, te međudjelovanjem svjetlosti i tvari. Specifičnije, bavili smo se geometrijskom optikom. U geometrijskoj optici zanemaruje se valna priroda svjetlosti, a temeljni je pojam svjetlosna zraka. Naš cilj je bio opisati zakone geometrijske optike te primijeniti ih i odrediti neke njihove posljedice. Cilj projekta bio nam je opisati kako rade naočale, mikroskopi, teleskopi i razni drugi objekti koji koriste zrcala i leće, ponekad čak i nenamijenjeni poput Walkie-talkie zgrade u Londonu.

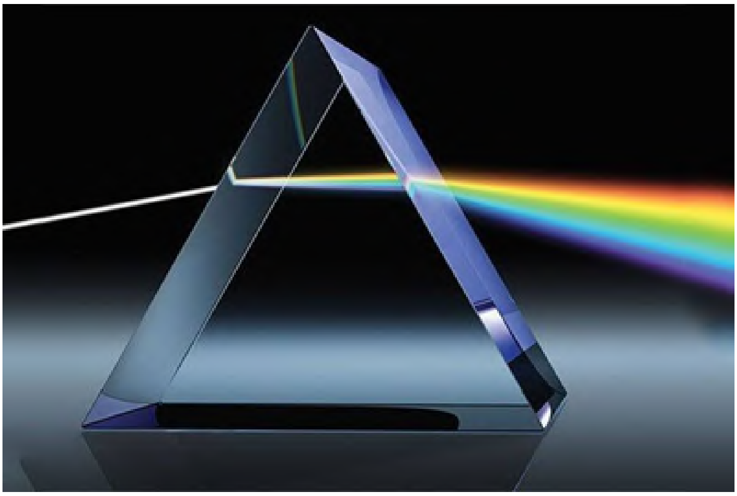
Jedna od prvih posljedica zakona optika se dogodi u skoro svakodnevnici – refrakcija svjetla. Primjer loma svjetlosti najlakše ćete vidjeti na jednom jednostavnom pokusu. U prozirnu čašu ulijte vodu i postavite u čašu olovku ili slamku. Pogledajte čašu iz različitih kutova. Uočit ćete da se olovka čini slomljena.



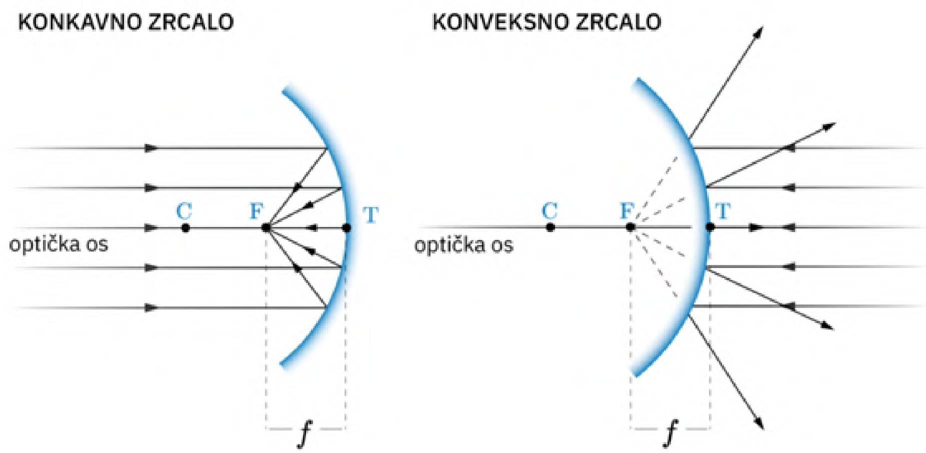
Time smo i došli do jedne posljedice zakona – Snellov zakon: zraka svjetlosti mijenja smjer kada prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugu.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

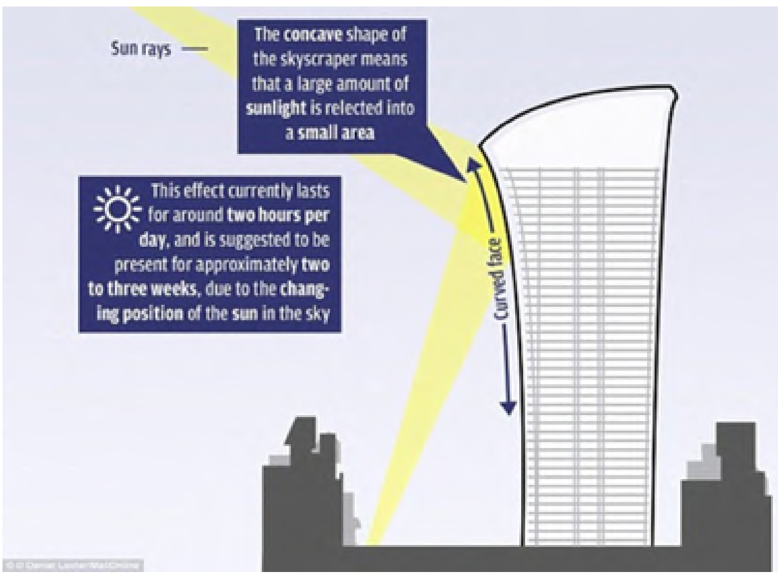
Također smo i spomenuli totalnu refleksiju te uz pomoć interpretacije svjetlosti kao vala objasnili i disperziju svjetlosti.



Nakon toga bavili smo se objektima koji reflektiraju svjetlost. Najprije smo proučavali zrcala. Dvije vrste koje smo naveli bile su ravna i sferna. Ravna nismo tolko spominjali jer su vrlo intuitivna i većinu svojstva i slika nastala u zrcalu se očuvaju, ali smo se više pozabavili sa sfernim zrcalima i njihovim slikama te primjenama.

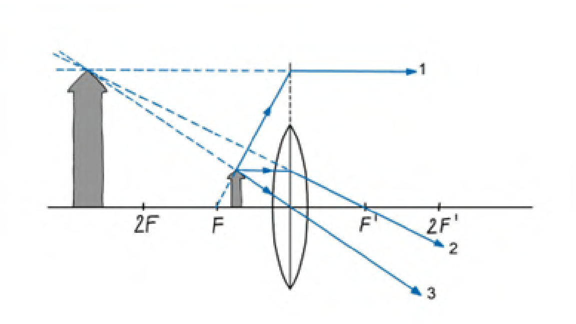


Izveli smo jednadžbu zrcala $\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ te grafički rješavali neke zadatke sa sfernim zrcalima ovisno o poziciji na optičkoj osi da bismo vidjeli kakva slika nastaje. Iz toga smo mogli vidjeti u kojim slučajevima i kako bi nam ta zrcala poslužila. Za konveksna smo zaključili da nam proširuju vidno polje te se zato koristi za retrovizore auta, dok smo za konkavna zaključili da mogu služiti za svjetiljke.



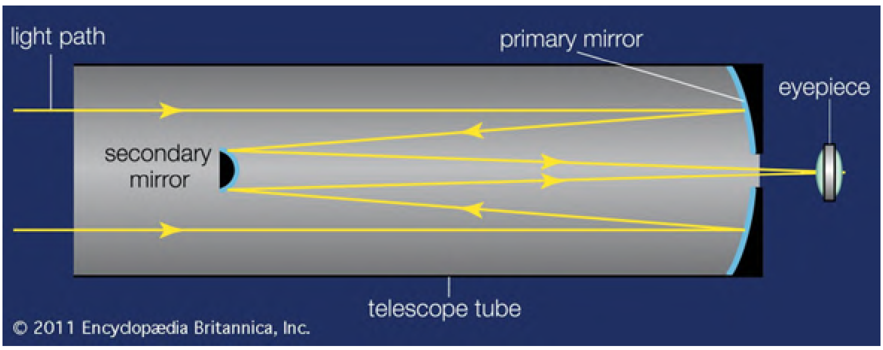
Također smo vidjeli slučaj gdje je jedna zgrada u Londonu slučajno služila kao konkavno zrcalo.

Dalje smo se bavili lećama, prozirnim tijelima koja se sastoje od 2 dioptra gdje je barem jedan sferni. Naveli smo vrste leća te kao i kod zrcala uz par grafičkih primjera smo zaključili gdje bi koja vrsta leće mogla poslužiti.

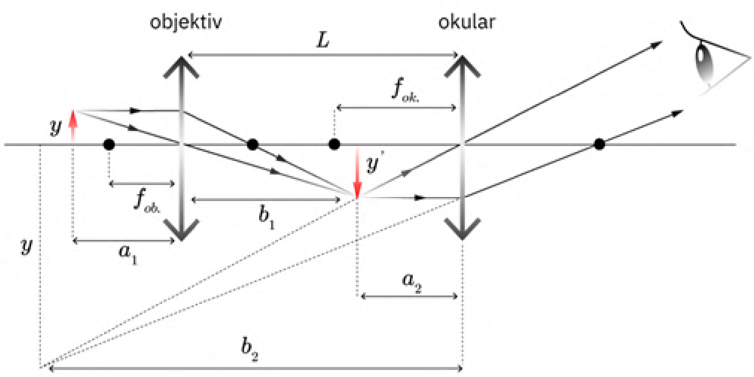


Vidjeli smo kako povećala koja koristi konvergentne bikonveksne leće rade i zašto trebamo približiti povećalo objektu kako bismo dobili uvećanu sliku.

Konačno, bavili smo se složenijim optičkim instrumentima. Objasnili smo kako mi sami vidimo te neke anomalije oka i kako se popravljaju.



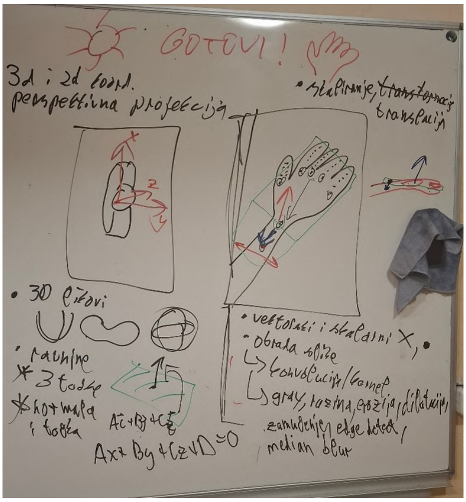
Objasnili smo i princip rada mikroskopa i teleskopa.



2.2.2. Od piksela do vektora: AR projekcija sata na ruku

Mentor: Martin Vrbovčan

Projekt Od piksela do vektora osmišljen je oko naizgled jednostavnog ali zapravo složenog zadatka: projicirati ručni sat na ruku. Koncept je iznikao iz aplikacija koje koriste *Augmented reality* tehnologiju za marketing. Zato je zadatak bio pokušati rekreirati tehnologiju takvih aplikacija, te matematički doći od video snimke sa mobitela do projekcije.

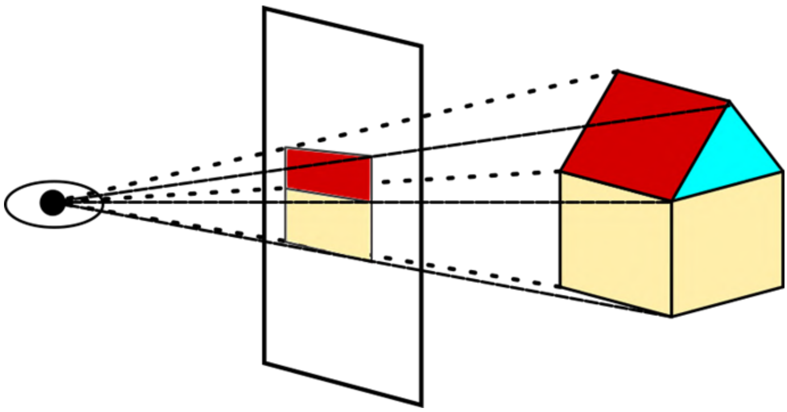


Pritom smo se služili znanjem iz 3D koordinatnih sustava, vektora, projekcija te smo uklopili gotovu dubinsku neuronsku mrežu za raspoznavanje ključnih točaka ruke. Konačno, pozabavili smo se i postupcima za procesiranje slika – zamućenje, erozija i dilatacija te nalaženje linija.

Na početku smo se upoznavali sa samim vektorima u 3D prostoru. Na temu vektora smo se upoznali sa skalarnim i vektorskim množenjem. Skalarnim množenjem dobivamo broj kao rezultat, a vektorskim množenjem dobivamo rezultantni vektor koji je okomit na druga dva vektora. Te operacije su računalno jednostavne za izvesti, a primjenu imaju u primjerice u projiciranju vektora na ravnine.

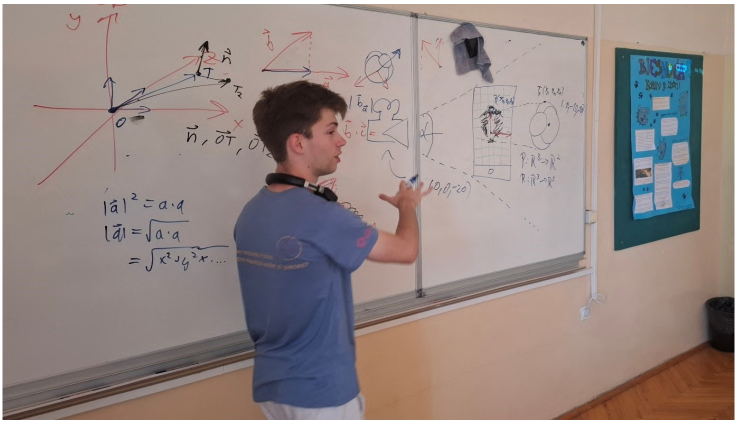
Spominjali smo i ravnine u 3D prostoru. Opća implicitna formula za ravninu je $Ax + By + Cz + D = 0$. Ravninu možemo odrediti pomoću barem 3 točke koje nisu kolinearne ili s jednom točkom i vektorom koji je okomit na ravninu (normala). Ravninu, kao i druge objekte poput sfera, također smo translatirali i skalirali u koordinatnom sustavu. Primjerice, ako želimo translatirati ravninu za $+3$ u smjeru y osi, formula bi izgledala ovako je $Ax + B(y-3) + Cz + D = 0$, a skaliranje dobivamo množenjem varijable određenim koeficijentom.

Osim transformacija, idući korak bila je metoda projekcije 3D objekta na 2D ekran. Odabrali smo perspektivnu projekciju, koja je dobar model naše prirodne percepcije gdje daleki predmeti izgledaju maleno naspram bliskih. Perspektivna projekcija funkcionira tako da postavimo „kameru“ koja gleda na ravninu koja funkcionira kao naš ekran, te se objekti nalaze iza nje. Provlačimo izvodnice iz točke kamere prema 3D točkama objekta te za 2D koordinatu razmatramo presjek s ekranom. Uz zadani kut vidnog polja i pomoću sličnosti možemo odrediti na takav način opisanu funkciju projekcije. Na ovaj način ekran mobitela može znati što treba nacrtati ako imamo definirani 3D koordinatni sustav i objekt u njemu.



Naoružani teoretskom pozadinom, trebali smo vidjeti kako se navedeni koncepti koriste u praksi. Kao osnovu za naše ideje o projekciji sata, pretpostavili smo da na video snimci primjenjujemo već gotov model neuronske mreže za pronalaženje ključnih točaka ruke (*Google MediaPipe*) i na temelju njih odlučivali gdje i kako smjestiti sat u 3D prostoru. Preko ključnih točaka ruke i primjenom vektorske aritmetike konstruirali smo točku gdje će se projicirati središte sata, te aproksimirali veličinu sata širinom šake. Navedeni podatci bi u programu bili dovoljni za prikazivanje sata.

Konačno, da bi bolje razumjeli kako se slike i pikseli inače obrađuju, proučavali smo tehnike obrade slike. Prvotno, svaki piksel slike ima 3 kanala —- crveni, zeleni i plavi (RGB). Za obradu je lakše raditi s jednom vrijednošću, pa možemo pretvoriti naše slike u nijanse sive (1 vrijednost) tako da za piksel uzmemo najveću vrijednost, prosjek, ili vrijednost jednog kanala. Nadalje, možemo sve piksele iznad neke vrijednosti obojati u bijelo, a ostale u crno (filter razine). Kombinacijom proširivanja svijetlih dijelova (dilatacije) i proširenja crnih dijelova (erozije) možemo zatvoriti rupe u tako obrađenoj slici (morfološko zatvaranje). Također smo spominjali konvolucije — „male filtere" koje množe vrijednosti piksela i njegove okoline za novu vrijednost piksela. Time se može postići zamućivanje, ili traženje linija i granica u slici.



2.2.3. Dinamički sustavi u jednoj kompleksnoj varijabli

Mentor: Luka Kraljević

Uvod

Na ovom projektu bavili smo se proučavanjem dinamičkih sustava u polju kompleksnih brojeva. Upoznali smo se s intrigantnim temama i nekim novim područjima matematike.
Počevši definiranjem dinamičkog sustava, bacili smo se na proučavanje u nama poznatoj okolini: Kartezijevom koordinatnom sustavu. Pri uvođenju logističkih funkcija, brzo smo primijetili neočekivano ponašanje oko nekih točaka pri višestrukoj primjeni funkcije. Takve točke, u kojima funkcija ne mijenja vrijednost, odlučili smo prozvati fiksnim točkama.
Motivirani svojom gladu za daljnjim znanjem, uvidjeli smo kako se ovakav sustav može proširiti na polje kompleksnih brojeva. Nažalost, za ovakav pothvat još nam je falilo par alata — primarno malo znanja o kompleksnim brojevima. Žustro smo odlučili uvesti dva načina zapisivanja ovih čudnih brojeva te krenuli s proučavanjem primjene elementarnih funkcija na njima. Saznanja o djelovanju eksponencijalne funkcije

omogućila su nam korištenje Eulerove formule. Slijedilo je promatranje obitelji kvadratnih funkcija u polju kompleksnih brojeva i Julia skupa koji ove funkcije definiraju. Pod ovim opravdanjem, iskoristili smo ovu savršenu priliku da crtamo i gledamo lijepe šarene fraktale.

Diskretni dinamički sustavi

Definicije i oznake

Diskretni dinamički sustav je uređeni par skupa X i pravila pridruživanja $f : X \longrightarrow X$. U takvom sustavu proučavamo učinak višestruke primjene preslikavanja f na cijeli skup X. Promatrati ćemo dinamičke sustave na prostoru realnih i kompleksnih brojeva.

- kompozicija funkcija: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
- $f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\dots f}_{\text{n puta}}(x)\dots)))$
- fiksna točka: x takav da je $f(x) = x$
- periodična točka: $\exists p$ takav da $f^p(x) = x$

Definicija 2.2.1: Konjugirani dinamički sustavi

Kažemo da su dinamički sustavi (X, f) i (Y, g) konjugirani ako postoji bijektivno pravilo pridruživanja h za koje vrijedi $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$ za svaki $x \in X$.

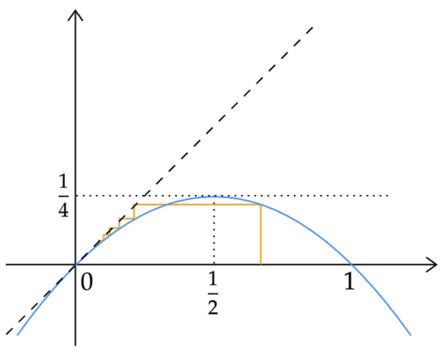
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

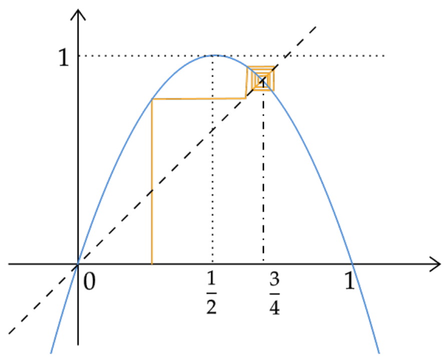
Konjugacije su nam jako korisne u proučavanju dinamičkih sustava zato što omogućuju da se složeni sustavi svedu na proučavanje jednostavnijih ili poznatih sustava. Dva konjugirana dinamička sustava imaju ista dinamička svojstva, ali opisana u različitim *koordinatama*. Na primjer, ako je x fiksna točka preslikavanja f, tada je $h(x)$ fiksna točka preslikavanja g:

$$f(x) = x \implies g(h(x)) = (g \circ h)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(x)$$

Logistička funkcija

Logistička funkcija je funkcija oblika $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Graf ove funkcije ima oblik parabole, apscisa tjemena je $x = \frac{1}{2}$, a njezine su nultočke 0 i 1.
Kako se mijenja vrijednost kad više puta primijenimo funkciju? Supstituirajmo za početak $\lambda = 1$. Za svaki $x \in \langle -\infty, 0\rangle$ vrijedi $f(x) < x$ pa vrijednost ide u negativnu beskonačnost. Isto se dogodi i za $x \in \langle 1, \infty\rangle$. Promotrimo zato funkciju samo na intervalu $[0, 1]$





Slika 1.: Prikaz grafova logističke funkcije za $\lambda = 1$ (lijevo) i $\lambda = 4$ (desno)

Kompleksni brojevi

Kompleksni brojevi su proširenje skupa realnih brojeva.

Definicija 2.2.2: Skup kompleksnih brojeva

Neka je i broj takav da vrijedi $i^2 = -1$. Tada je

$$\mathbb{C} = \{\ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\ \}$$

Za $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ jednak je udaljenosti broja z od ishodišta u kompleksnoj ravnini, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Lema 2.2.3: Polarni zapis

Svaki $z \in \mathbb{C}$ možemo zapisati kao uređeni par (r, θ) gdje je r udaljenost od ishodišta, a θ kut otklona od realne osi.

$$(r, \theta) \leftrightarrow r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$$

Ispostavlja se da je moguće proširiti definiciju eksponencijalne funkcije na sve kompleksne brojeve. Što nas dovodi do Eulerove formule:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Na kompleksnim brojevima možemo koristiti klasične aritmetičke operacije.

Propozicija 2.2.4: Aritmetičke operacije u skupu kompleksnih brojeva

Za $A, B \in \mathbb{C}$ takve da

$$\begin{aligned} A &= x + yi = r \cdot e^{i\theta} \quad & x, y \in \mathbb{R}, \quad & r \in \mathbb{R}^+, \quad & \theta \in [0, 2\pi) \\ B &= z + wi = s \cdot e^{i\varphi} \quad & z, w \in \mathbb{R}, \quad & s \in \mathbb{R}^+, \quad & \varphi \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

tada:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad &|| \quad A + B := (x + z) + (y + w)\, i \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad &|| \quad A \cdot B := rs \cdot e^{i(\theta + \varphi)} \end{aligned}$$

Zanimljivo je to što rotaciju, skaliranje i translaciju ravnine možemo prikazati kao množenje ili zbrajanje svih točaka ravnine s kompleksnim brojem.

Kvadratna familija

Kvadratna familija je skup svih kompleksnih kvadratnih funkcija oblika $Q_c(z) = z^2 + c$. Sve se kvadratne funkcije mogu razumjeti prema ovom obliku unatoč uobičajenoj formuli $f(z) = z^2 + pz + q$. Naime, moguće je izvršiti klasičan postupak dopune kvadrata za svaku kvadratnu funkciju:

$$z^2 + pz + q = z^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Sada preko konjugacije $h(z) = z + \frac{p}{2}$ dobivamo da su f i Q_c konjugirana preslikavanja, za $c = q - \frac{p^2}{4} + \frac{p}{2}$

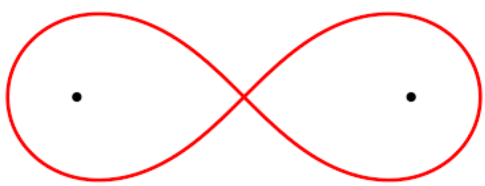
Cassinijeve krivulje i lemniscate

Neka je $Q_c : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ funkcija iz kvadratne familije i $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{C}$ skup točaka čija je slika $Q_c(\mathbb{X})$ u kompleksnoj ravnini kružnica radijusa k. Skup točaka $\mathbb{X}$ u kompleksnoj ravnini čini krivulju koja se naziva Cassinijeva krivulja.

Promotrimo funkciju Q_{-1}. Kad bi slika funkcije bila kružnica radijusa k, sve bi točke zadovoljavale jednakost $|Q_{-1}(z)| = k$

$$\begin{aligned}
\left|z^2 - 1\right| &= k \\
\left|\left(re^{i\theta}\right)^2 - 1\right| &= k \\
\left|r^2\left(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)\right) - 1\right| &= k \\
\left|r^2\cos(2\theta) - 1 + ir^2\sin(2\theta)\right| &= k \\
\left(r^2\cos(2\theta) - 1\right)^2 + \left(r^2\sin(2\theta)\right)^2 &= k^2 \\
r^4\cos^2(2\theta) - 2r^2\cos(2\theta) + 1 + r^4\sin^2(2\theta) &= k^2 \\
r^4\left(\cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)\right) - 2r^2\cos(2\theta) &= k^2 - 1 \\
r^4 - 2r^2\cos(2\theta) &= k^2 - 1
\end{aligned}$$

U specifičnom slučaju $k^2 = 1$ rješavanjem jednadžbe dolazimo do $r = \sqrt{2\cos(2\theta)}$ što je funkcija kuta (argumenta) kompleksnog broja i ovakva Cassinijeva krivulja naziva se *lemniscate.*



Klasifikacija fiksnih točaka

Neka je $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ kompleksna funkcija i $f_0 = f(z_0)$ neka fiksna točka. Vrijednost $\lambda := f'(z_0)$ naziva se *multiplikator* fiksne točke z_0 za funkciju f. S obzirom na λ, razlikujemo različite tipove fiksnih točaka:

- superprivlačna: $\lambda = 0$
- privlačna: $0 < |\lambda| < 1$
- odbojna: $|\lambda| > 1$
- neutralna: $|\lambda| = 1$

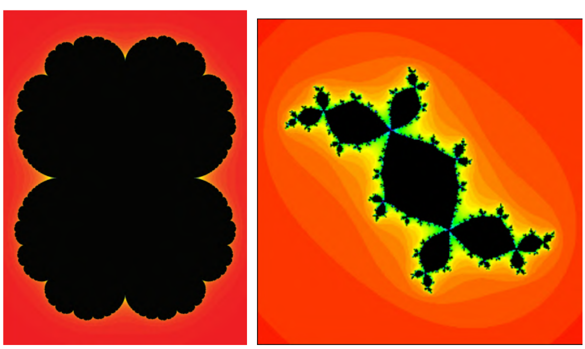
Ako je $|\lambda| \neq 1$, fiksna točka je hiperbolična, a ako je $\lambda = 1$, tada je parabolična. Također razlikujemo racionalno i iracionalno neutralne fiksne točke: racionalne su one za koje je λ oblika $e^{2\pi \frac{p}{q} i}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ jer će nakon q primjena funkcije vrijediti $\lambda^q = e^{2pi\pi} = 1$

Julia skup

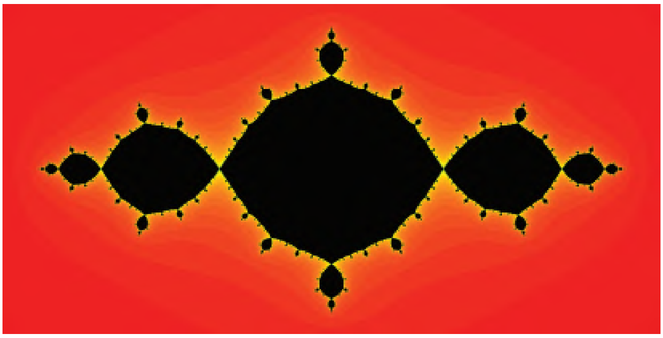
Pri promatranju dinamike sustava naravno važno nam je raspoznaznati koje točke konvergiraju a koje divergiraju pri višestrukim primjenjivanjem funkcije. U ovu svrhu služi nam Julia skup. Neformalno, *Julia* skup je skup svih točaka koje su izrazito osjetljive na promjene u početnim uvjetima. Drugačije rečeno, na okolini točke u Julia skupu ne možemo jednoznačno odrediti hoće li točke u toj okolini konvergirati ili divergirati.

Komplement Julia skupa zovemo Fatou-ov skup. Točke u ne omeđenom dijelu Fatou-ovog skupa divergiraju, a u ostatku konvergiraju.

Promotrimo sad neke Julia i Fatou-ove skupove kvadratnih polinoma iz familije $\{\ Q_c \ |\ c \in \mathbb{C}\ \}$ na primjeru lijepe šarene sličice.

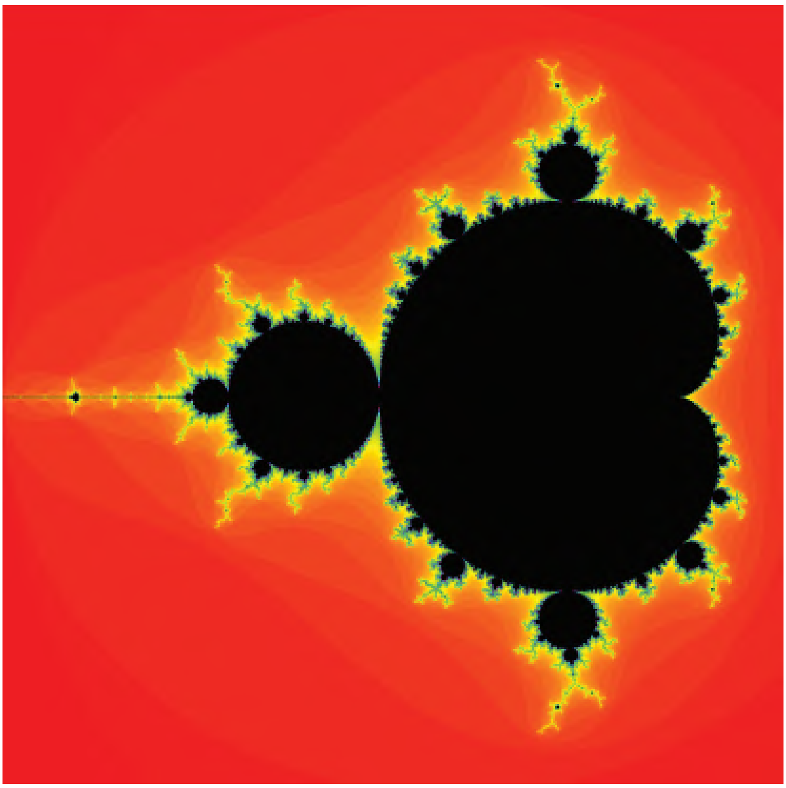


Slika 2.: Prikaz Julia skupova za polinome $z^2 + \frac{1}{4}$ (lijevo) i $z^2 - 0.122 + 0.745i$ (desno)



Slika 3.: Prikaz Julia skupa za polinom $z^2 - 1$

Mandelbrotov skup definiramo kao skup svih parametara c za koje je Julia skup kvadratnog polinoma Q_c povezan.



Slika 4.: Prikaz Mandelbrotovog skupa.

3. Miniprojekti na Konferenciji

Ovogodišnji miniprojekti bili su aktivnost slična predavanjima, no s očekivanim angažmanom učenika kroz komunikaciju s mentorima i ostalim sudionicima. Svaki učenik sudjelovao je na jednom miniprojektu ukupnog trajanja 4 sata. Na Konferenciji su bila ponuđena ukupno dva miniprojekta, oba orijentirana na naprednije matematičke teme s kojima se obično možemo susresti tek na fakultetu.

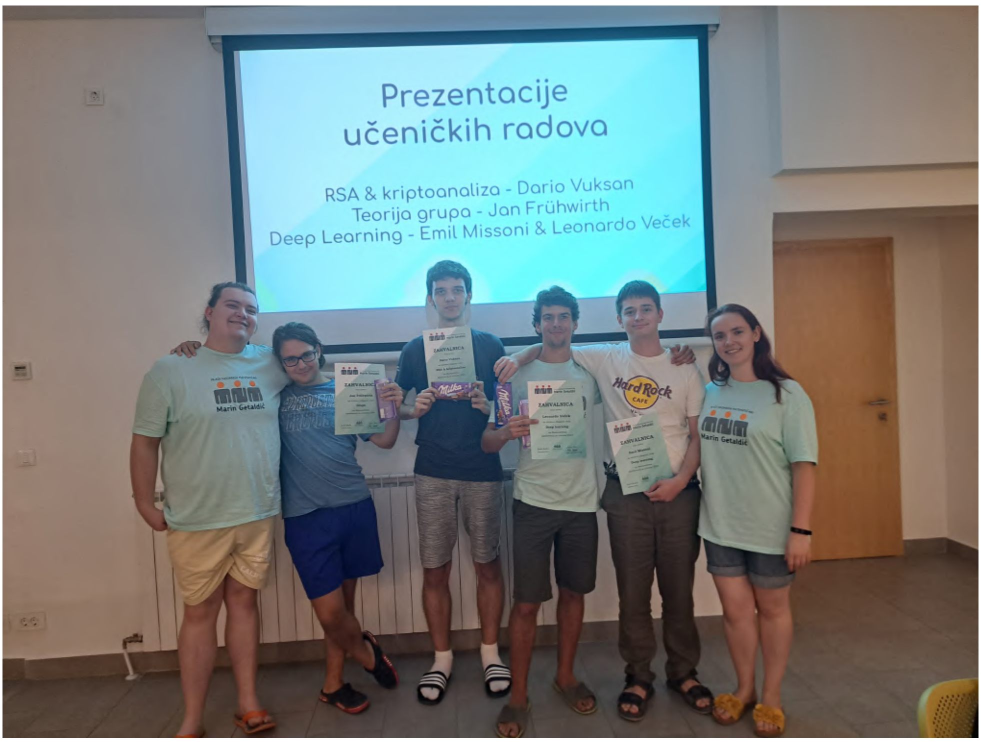
Linearna algebra područje je matematike koja se bavi vektorima ("usmjerenim dužinama"; prije svega onima u ravnini i prostoru, ali i u višim dimenzijama), te nam znanje iz nje pomaže u rješavanju velikih (linearnih) sustava s puno nepoznanica ili u predviđanju ponašanja nepoznate funkcije pomoću polinoma.

Realna analiza je pak područje matematike koje pobliže proučava funkcije i njihova svojstva te zbog njih možemo naučiti nešto više o vrstama funkcija, kada su one "lijepe" i pogodne za analizu, raznim nizovima, što je limes, te kako derivirati i integrirati funkcije.

4. Prezentacije na Konferenciji

4.1. Prezentacije učeničkih radova

Matematička konferencija naša je prva aktivnost na kojoj smo dali priliku i učenicima da nešto pripreme i prezentiraju. Kao i na "pravim" konferencijama, učenici su mogli prijaviti temu koju su potom detaljnije istražili i pripremili izlaganje. Na taj smo način htjeli potaknuti učenike na samostalno istraživanje teme koja ih zanima, naravno uz ponuđenu pomoć i savjet mentora. Prezentacijom ostalim sudionicima dobili su vrijedno iskustvo javnog nastupa, ali i potencijalno potaknuli ostale sudionike za daljnje proučavanje teme.
Na ovogodišnjoj konferenciji sudionici su mogli čuti čak tri prezentacije učeničkih radova, a sve su prijavili učenici srednje škole.



4.1.1. Grupe

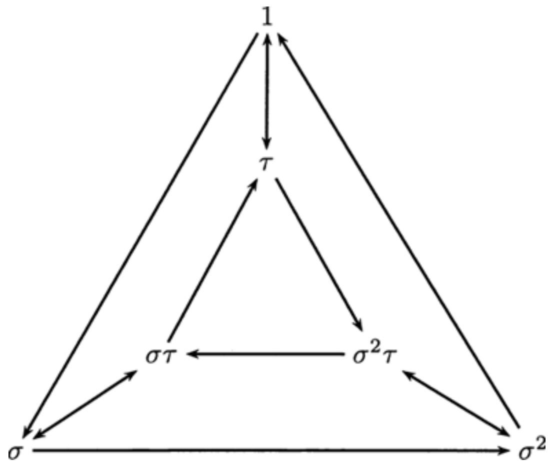
Jan Frühwirth

Sa grupama sam se prvi put susreo tijekom prošle godine kada me je moja najmilija profesorica iz matematike mučila sa nekom „izbornom“ lektirom (da, iz matematike) koju sam kao morao pročitat ako želim ikad imat odličan iz matematike. Kako je moja stipendija ovisila o toj ocjeni, naravno, pročitao sam tu knjigu. Naslov knjige neću ovdje navoditi, kako, sukladno svim očekivanjima, knjiga ništa ne valja i nije vrijedna čitanja. Usprkos tome, u toj knjizi prvi put sam se susreo sa konceptom grupe. Tu se u meni rodila velika želja da se pravim pametan, tj. da proširim znanje i probam što intuitivnije objasniti koncept grupe.

A što li je to uopće grupa? Grupa je matematički alat osmišljen za prikazivanje simetrije. Matematički, grupu definiramo kao strukturu nad skupom koja zadovoljava neke aksiome, preciznije imamo binarnu operaciju u skupu te vrijedi da ona mora biti asocijativna, imati neutralni element, i mora postojati inverz za svaki element. Kao i svaka druga matematička definicija, to je zapravo samo beskorisna hrpa riječi koje običnom čovjeku ne znače ništa. Kako je intuitivnost bilo važan kriterij, odlučio sam se fokusirati na grupama generiranim geometrijskim simetrijama. To mi je omogućilo da uvedem koncept grupe kao „skup svih akcija (simetrija) koje su takve da geometriju ostavljaju manje-više nepromijenjenom“. Tu je binarna operacija naravno kompozicija, tj. „nakon čega slijedi“ operator. Lijepo i intuitivno.

Sa postavljenim temeljima, krenuo sam uz pomoć svoje vjerne skripte (koju sam pokrao sa interneta, i možete je naći na vrhu popisa izvora) otkrivati svojstva grupa. Grupe nisu uvijek kumulativne, a kumulativne grupe zovemo Abelovim grupama. Ovo smo demonstrirali na primjeru trokuta (sve smo demonstrirali na primjeru trokuta) da se prvom rukom uvjerimo u to. Tu činjenicu sam pokušao naglasiti jer je iznimno bitna. Nakon toga želio sam dokazati jedinstvenost identitete i inverza; nažalost zaboravio sam na taj dio pa je bio izbačen iz prezentacije.

Pokazao sam još neke primjere grupa, tako da bude jasno da postoje grupe koje nisu simetrije grafova. Radilo se o S grupama (simetričnim grupama), C grupama (cikličkim grupama) i dao sam primjere nekih beskonačnih grupa (npr. cijeli brojevi pri zbrajanju, racionalni brojevi bez nule pri množenju itd.). Ovdje sam uzeo malo vremena da pokažem par primjera Cayleyevih tablica i grafova. Čisto da imam i neke lijepe sličice u prezentaciji.



Na kraju, odlučio sam mučiti ljude uvođenjem koncepta homomorfizma i izomorfizma. Zahvalan sam svima koji su me još slušali u tom trenutku. Osobno, smatram kako je ovo najzanimljiviji dio vezan za grupe, barem u uskom razumijevanju za temu koje sam uspio steći tijekom pripremanja ove prezentacije, a od kada sam se susreo sa time nalazim slične ideje u mnogim drugim dijelovima matematike. Svakako apeliram bilo kome imalo zainteresiranom da više prouči temu, no ova ideja zapravo nije nešto što se moglo sasvim jasno objasniti u jednoj kratkoj prezentaciji. Svakako bih htio u budućnosti detaljnije istražiti temu.

Kako sam se bližio kraju, proveo sam malo vremena diskutirajući kako iz grupa nastaju druge grupe. Najbitnije u obliku podgrupe, ali i množenjem i dijeljenjem. Kada sam napokon počeo raspravljati Cayleyev teorem rekli su mi da sam prekoračio vrijeme za punih petnaest minuta, pa sam preskočio drugu polovicu prezentacije i poslao ljude da se zabavljaju.

Zaključno, drago mi je što sam svoj uradak mogao prezentirati na Matematičkoj konferenciji, i nadam se da su se ljudi zabavili slušajući mene kako pričam barem onoliko koliko sam se ja zabavljao radeći svoju prezentaciju.

Također smatram kako mi je ova tema pružala uvid u područja matematike s kojima se možda nikada i ne bih susreo, a stečena znanja već se sada pokazuju korisnima na nekim vrlo neočekivanim područjima matematike. Sljedeće godine se svakako nadam ponovno prezentirati neki svoj uradak.

Literatura i izvori

- Moja vjerna skripta: https://www.maths.gla.ac.uk/~mwemyss/teaching/3alg1-7.pdf
- Još neke dosta dobre skripte koje sam konzultirao: https://people.bath.ac.uk/gt223/MA30237/lnotes.pdf, https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/GT.pdf
- Skupno znanje cijeloga čovječanstva: https://www.wikipedia.org/
- Dugačka playlista na youtubu koja jako intuitivno objašnjava grupe: https://www.youtube.com/watch?v=RnqwFpyqJFw
- Malo o primjeni teorije grupa za rješavanje rubikove kocke: https://people.math.harvard.edu/~jjchen/docs/Group%20Theory%20and%20the%20Rubik's%20Cube.pdf
- Jako dobar uvod u Galoisovu teoriju: https://nrich.maths.org/1422
- Spomenuta knjiga: Mario Livio, Simetrija - Jednadžba koju nije bilo moguće riješiti

4.1.2. Deep learning

Emil Missoni, Leonardo Veček

U izlaganju smo okvirno objasnili kako radi tipična neuronska mreža, spomenuli razne vrste neuronskih mreža poput FNN, CNN, RNN, LSTM i GAN te koje probleme one rješavaju, od čega se sastoje te kako ih napraviti kod kuće.

Demonstrirali smo par algoritama koji "uče" neuronske mreže te smo također izraditi interaktivnu web stranicu na kojoj možete crtati, a neuronska mreža će vam reći koliko je sigurna u to je li nacrtani objekt slovo ’A’, ’B’ ili ’C’, te možete otkriti kako se ponaša mreža kada joj nacrtate bilo što drugo.

Naš kod i rezultate rada možete pogledati na: https://github.com/EmilMis/ABC_NN.

Literatura i izvori

- https://en.wikipedia.org/wiki/Neural_network_(machine_learning)
- https://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_artificial_neural_networks
- https://www.tensorflow.org/tutorials/generative/dcgan
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLZHQObOWTQDNU6R1_67000Dx_ZCJB-3pi
- https://www.youtube.com/playlist?list=PLQVvvaa0QuDcjD5BAw2DxE6OF2

4.1.3. RSA & kriptoanaliza

Dario Vuksan

RSA je jedan od prvih praktičnih asimetričnih kriptosustava koji se danas koristi svugdje u svijetu za sigurnu razmjenu podataka na internetu. Stekao je popularnost zbog toga što je jednostavan za razumjeti i nije zahtjevan za računalo, što omogućuje njegovu primjenu u ugrađenim sustavima s vrlo ograničenom memorijom i procesorom, poput automobila i pametnih kartica. Predstavili su ga Ron Rivest, Adi Shamir i Leonard Adleman 1977. godine. Dobio je ime po prvim slovima njihovih prezimena. Od tada je postao standard za enkripciju podataka i za digitalne potpise. Temelji se na problemu faktorizacije velikih brojeva za koji trenutno ne postoji učinkovit algoritam.

Ovaj rad pružio je detaljan uvid u RSA kriptosustav i njegove matematičke temeljem, važnost u modernoj kriptografiji, kao i izazove s kojima se suočava u kontekstu sigurnosti i kriptoanalize.

U uvodu su objašnjeni temeljni koncepti potrebni za razumijevanje matematike koja stoji iza RSA, koja je bila objašnjena u drugom poglavlju.

RSA je asimetrični kriptosustav, što znači da postoje dva ključa: privatni ključ (n, d) i javni ključ (n, e). Javni ključ služi za šifriranje podataka, a privatni ključ za dešifriranje. Pored toga, privatni ključ služi za stvaranje digitalnog potpisa, a javni ključ za njegovo potvrđivanje. Razlog za digitalni potpis je taj što je javni ključ dostupan svima te ne garanatira da je pošiljatelj onaj kao tko se predstavlja. Ako pošitaljelj potpiše poruku svojim privatnim ključem, primatelj može pošiljateljevim javnim ključem potvrditi autentičnost poruke.

Privatni i javni ključ zapravo su parovi prirodnih brojeva. n se naziva *modulus*, e je javni eksponent, a d je privatni eksponent. $n = pq$ je umnožak dva prosta faktora nepoznata pošiljatelju. RSA se temelji na problemu faktorizacije – ako ikad pronađemo učinkovit algoritam za faktorizaciju, cijeli RSA kriptosustav propada. d je modularni inverz broja e modulo $\varphi(n) = (p-1)(q-1) = n-p-q-1$, što znači da je $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$.

Javni eksponent e uglavnom je Fermatov prosti broj. To je prosti broj oblika $2^{2^n}+1$, a poznato ih je samo pet: 3, 5, 17, 257 i 65537. Razlog tome je učinkovitost modularnog potenciranja kad je eksponent Fermatov broj, a kad je prost broj, onda će sigurno postojati i njegov modularni multiplikativni inverz (broj d). Standard preporuča korištenje 65537.

Mnoge slabosti RSA kriptosustava javljaju se u implementacijama u kojima višestruko kriptiranje iste poruke uvijek rezultira identičnim šifratom. Upravo zato RSA standard također definira shemu za nadopunjavanje poruke (eng. *padding*), za koje je bitno da je nepredvidljivo, ali potpuno bijektivno. Očito je da u tom slučaju i pošiljatelj i primatelj moraju poznavati o kakvoj shemi se radi (zato ona i je dio standarda), ali to je prihvatljivo, zato što u sigurnom kriptosustavu mora biti javno sve osim tajnog ključa. Standardna shema naziva se RSAES-OAEP i definirana je u RFC 8017 poglavlju 7.1

Zbog uvjeta $m < n$, moguće je šifrirati samo toliko duge poruke. Ponekad ima smisla poslati velike datoteke preko nesigurne mreže, u tom slučaju sadržaj same datoteke šifrira se nekim bržim simetričnim kriptosustavom kao što je AES, a RSA se koristi za šifriranje ključa kojim će primatelj dešifrirati sadržaj datoteke.

Literatura i izvori

- Shanika Wickramasinghe – *RSA Algorithm in Cryptography: Rivest Shamir Adleman Explained* https://www.splunk.com/en_us/blog/learn/rsa-algorithm-cryptography.html (pristupljeno 4.6.2024.)

- Mei Li, Sharky Kesa, Christopher Williams et. al. – *Modular Arithmetic* https://brilliant.org/wiki/modular-arithmetic/ (pristupljeno 4.6.2024.)

- Jelena Dujella – *Kongruencije* https://umo.mathos.unios.hr/wp-content/uploads/2022/11/Osijek_2022_2023___J2.pdf (pristupljeno 4.6.2024.)

- RFC 8017 - PKCS #1 – *RSA Cryptography Specifications Version 2.2* https://datatracker.ietf.org/doc/html/rfc8017 (pristupljeno 4.6.2024.)

- Sonja Puač - *Kongruencije i kriptografija* https://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/PUA02.pdf (pristupljeno 4.6.2024.)
- Marko Barać - *RSA kriptosustav i neki kriptoanalitički napadi* https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmfst:1183/datastream/PDF/view (pristupljeno 4.6.2024.)
- *RSA Attacks* https://math.umd.edu/~immortal/MATH406/lecturenotes/ch8-Additional.pdf (pristupljeno 4.6.2024.)
- Sebastian Pauli - *MAT 112 Integers and Modern Applications for the Uninitiated* https://mathstats.uncg.edu/sites/pauli/112/HTML/secfastexp.html (pristupljeno 8.7.2024.)
- Ben Lynn - *The Chinese Remainder Theorem* https://crypto.stanford.edu/pbc/notes/numbertheory/crt.html (pristupljeno 8.7.2024.)

4.2. Popularno-znanstveno predavanje

Popularno-znanstvena (PZ) predavanja već se tradicionalno održavaju na našim ljetnim kampovima i zimskim školama, pa smo tu tradiciju odlučili proširiti na MatKo 2023. i održati na MatKo 2024. Predavači na PZ predavanjima često su bivši članovi Udruge, zaposleni na fakultetu i aktivno uključeni u znanstvena istraživanja ili pak rade u industriji, primjenjujući matematiku na ponekad iznenađujuće načine. Učenici na ovakvim predavanjima imaju priliku čuti o konkretnim situacijama i problemima s kojima se susreću stručnjaci te saznati gdje sve vrhunski matematičari mogu pronaći svoje mjesto pod suncem.

Inspirirano sve većim utjecajem...

4.2.1. Modeliranje vjerovanja i racionalnosti korištenjem vjerojatnosti

Martin Vrbovčan

Predavanje je započelo pregledom povijesti umjetne inteligencije, čiji su temelji postavljeni 1956. godine na Dartmouth konferenciji. Martin je ilustrirao rane početke ove znanosti te istaknuo ključne probleme i izazove s kojima su se istraživači suočavali.

Primjerice, 1966. godine razvijen je prvi robot sposoban za elementarno zaključivanje i izvršavanje naredbi – Shakey. Opremljen kamerom i kotačima, mogao je samostalno planirati niz koraka potrebnih za postizanje cilja. Međutim, ubrzo je postalo jasno da se naš svakodnevni svijet teško može modelirati strogo determinističkim sustavima logike i uzročno-posljedičnih odnosa. Tako bi se, primjerice, moglo dogoditi da Shakey pokuša napustiti prostoriju, ali umjesto da otvori vrata, jednostavno bi se zaletio u njih. To bi ga dovelo u stanje zbunjenosti, pri čemu bi "vjerovao" da je izašao iz prostorije, iako se u stvarnosti nije pomaknuo. Ova fundamentalna ograničenja determinističkih sustava dovela su do traženja novih paradigmi u modeliranju inteligencije.

Moderni pristup temelji se na probabilističkom modeliranju. Umjesto fiksnih, binarnih vjerovanja, agenti poput robota sada održavaju raspon vjerojatnosti pridruženih svojim uvjerenjima (npr. trenutna pozicija, mogućnost izvršenja zadatka itd.). Kroz opažanja i ažuriranja, agenti dinamički prilagođavaju svoja uvjerenja, reflektirajući promjenjive uvjete u okolini. Ova metoda omogućuje modeliranje ne samo umjetnih sustava, već i ljudskog zaključivanja i donošenja odluka. Možemo, primjerice, zamisliti debatu između dvoje kandidata, gdje svaki polazi od različite vjerojatnosti za određenu tvrdnju – jedan bi joj mogao pridati 90% sigurnosti, dok bi je drugi smatrao gotovo nemogućom, s vjerojatnošću manjom od 5%. Tijekom argumentacije, obojica bi trebala ažurirati svoja uvjerenja u skladu s iznesenim dokazima, približavajući se racionalno utemeljenoj vrijednosti.

Ključnu ulogu u ovom procesu igra Bayesov teorem, koji matematički određuje kako prilagoditi vjerojatnosti uvjerenja na temelju novih informacija. Ova paradigma ne samo da omogućuje strogo matematičko modeliranje racionalnog zaključivanja, već i objašnjava razne kognitivne pristranosti i iracionalnosti u ljudskom mišljenju. Primjerice, zakon vjerojatnosti nalaže da zajednička vjerojatnost dvaju događaja nikada ne može biti veća od vjerojatnosti pojedinog događaja ($P(A) \geq P(A \cap B)$), što je u skladu sa zdravim razumom. Ipak, istraživanja su pokazala da ljudi često nesvjesno krše ovo pravilo, precjenjujući koherentne, ali malo vjerojatne scenarije. Još jedna važna posljedica Bayesovog zaključivanja jest da promatranje novog podatka može samo povećati ili smanjiti vjerojatnost određene teorije – ne postoji scenarij u kojem bi nova saznanja istodobno potvrđivala i pobijala istu hipotezu. Stoga, teorije koje generiraju previše predviđanja lako se mogu opovrgnuti, jer je dovoljna jedna neusklađenost s opažanjima da im značajno oslabi vjerodostojnost.

Ovi i mnogi drugi razlozi čine vjerojatnosni model zaključivanja snažnim i široko primjenjivim matematičkim okvirom za analizu vjerovanja i racionalnosti. Štoviše, u pojedinim intelektualnim zajednicama, poput internetskih racionalista, Bayesov teorem stekao je gotovo kultni status – i to s razlogom. U svijetu preplavljenom informacijama, razumijevanje načina na koji oblikujemo uvjerenja postaje sve važnije. A ako želimo donositi bolje odluke, možda je najbolji put upravo kroz vjerojatnost – jer, u konačnici, racionalnost je pitanje ažuriranja naših uvjerenja prema istini.

5. Ostale aktivnosti

Kako sudionicima Konferencije ne bi bilo dosadno, skoro svake večeri organizirali smo i neke malo drugačije aktivnosti. Prvi smo se dan svi bolje upoznali kroz igre upoznavanja, otvorili Konferenciju i zagrijali za Konferenciju kroz natjecanje u procjenjivanju, *Estimathon*. Drugu večer raspravili smo neke ozbiljnije teme tijekom Okruglog stola, a treću večer zabavili smo se uz kviz. Zadnje smo večeri nažalost morali završiti i zatvoriti Konferenciju, a sve su grupe naučeno prezentirale ostalim sudionicima. Osim toga, tijekom cijele konferencije igrala se i strateška igra *Blotto*!

Igre upoznavanja već su tradicionalna aktivnost na našim kampovima. Ove godine, neki od zadataka bili su napisati činkvinu, otpjevati refren pjesme Daleke obale, skupiti selfije s mentorima i smjestiti što više članova tima unutar kredom nacrtanog kvadrata.

Kroz navedene igre, sudionici Konferencije imali su priliku bolje se upoznati međusobno, upoznati mentore i lokaciju Konferencije, ali i razvijati svoje logičko i matematičko razmišljanje, a pritom se i ludo zabaviti!

Popularnost kvizova može se zaključiti i na našim aktivnostima — za sudionike smo kao razonodu i oblik zajedničkog druženja ponovno pripremili kviz općeg znanja. Između ostalog, timovi su imali zadatak prisjetiti se početnih i završnih rečenica nekih književnih djela te prepoznati poznate znanstvenike prema njihovim biografijama. Pobjedu je odnio tim Ingretali i deviracije.

Kao zahvalu za izvrsnu Konferenciju i druženje, zadnje večeri odlučili smo počastiti učenike i mentore palačinkama. Za sudionike Konferencije ispekli smo oko 60 palačinki i time vratili pomalo zaboravljenu praksu na kampovima. Tako smo u dobrom društvu, uz palačinke i naravno glazbu, zatvorili još jednu Matematičku konferenciju za učenike!

6. Zahvale

Budući da je nakon čak 5 godina pauze i modifikacije formata Matematička konferencija ponovno održana tek 2023. godine, organizacija Matematičke konferencije za učenike 2024. bio je izazovan posao, ali iznimno ispunjujući. Godine prije naišli smo na razne poteškoće koje smo uspjeli prevladati i naučiti iz svojih grešaka te tako ove godine osigurati još bolje iskustvo i prilagođeniji program. Iznimno smo zahvalni svima koji su nam u tome pomogli na bilo koji način. Ovim putem htjeli bismo zahvaliti **svima** koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji Matematičke konferencije! ☺

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Srednjoj školi "Braća Radić" i Učeničkom domu, koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućili ugodan, poučan i siguran boravak u Kaštel Štafiliću.

Velika zahvala ide našem sponzoru, Jane Streetu. Osim što financijski podupiru sve aktivnosti Udruge, a među njima i Matematičku konferenciju za učenike, i ovaj puta su poslali posebne nagrade za sve sudionike Konferencije.

Želimo iskreno zahvaliti i našem sponzoru Stype, te našim donatorima; Končar i PBZ Card. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše Udruge i Matematičke konferencije.

Nadalje, hvala i Hrvatskom matematičkom društvu, našem glavnom partneru, za vjernu pomoć u organizaciji i promociji svih naših aktivnosti, pa tako i Matematičke konferencije.

Naravno, Konferencija ne bi bila moguća bez svih mentora koji su svojim trudom i radom svim polaznicima pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje istraživanje i bavljenje matematikom.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima, roditeljima, učiteljima, profesorima i svima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem i razvijanjem znanja u STEM području. Kad vidimo nasmijana lica i zadovoljne učenike, znamo da je vrijedilo svog uloženog truda. Nadamo se u sljedećoj godini još većem odazivu i veselimo se ponovnom druženju!

Veliko hvala svima!

Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: mnm.hr

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte!

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: konferencija@mnm.hr
kontakti i društvene mreže: mnm.hr

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata.