MLADI NADARENI MATEMATIČARI
Marin Getaldić

Ljetni kamp mladih matematičara 2025.

Kaštel Štafilić,

7. - 14. 8. 2025.

Sadržaj Knjige predavanja

II Hintovi s predavanja

III Rješenja s predavanja

1. Predgovor

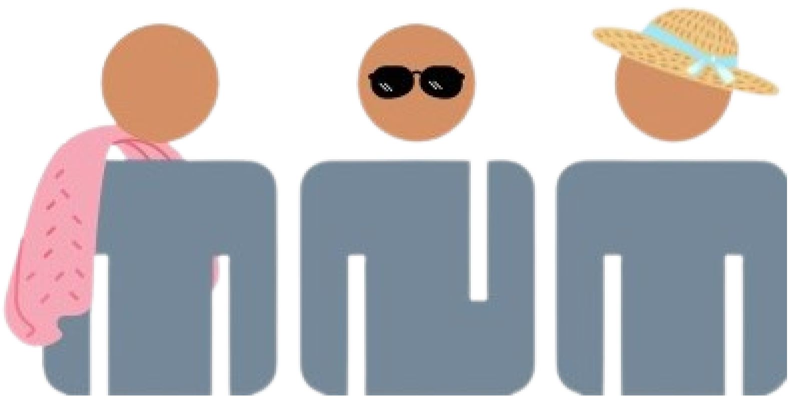
U ovoj knjizi moguće je pronaći sva predavanja koja su se održala na Ljetnom kampu matematike 2025. godine, zajedno sa ~~većinom~~ **svim** hintovima i rješenjima.

Osnovna namjera izrade ovih materijala stoji u činjenici da je na predavanju moguće pojasniti samo tehnike rješavanja, a da je za primjenu istih potrebna i vježba, što učenici uz pomoć ovih materijala mogu sami raditi.

Dodatno, knjiga sadrži opis naše udruge i samog Ljetnog kampa u nadi da će zainteresirati čitatelja ove knjige da prati naš rad i sudjeluje u našim aktivnostima.

Za bilo kakve uočene pogreške u knjizi bili bismo zahvalni ako biste se javili na našu email adresu.

mentori Udruge,
20. rujna 2025.



2. Uvod

2.1. O udruzi

Već mnogo godina gimnazije u Hrvatskoj pripremaju mlade matematičare za natjecanja iz matematike, nudeći im razne mogućnosti, raznovrsna znanja te otvaranje vidika u sva područja matematike. Od raznih prilagodbi redovne nastave matematike te pripreme su polagano obuhvatile i druge oblike pripremanja učenika za natjecanja poput dodatnih nastava koje su održavali studenti i bivši natjecatelji, uglavnom u svojim završenim srednjim školama. U takvim vrstama priprema u to vrijeme posebno su prednjačile zagrebačke XV. i V. gimnazija.
Školske godine 2008./2009. rodila se ideja ujedinjenja mentora mladih matematičara tih dviju gimnazija, a i svih ostalih najboljih matematičara u Hrvatskoj, u jednom velikom projektu unaprjeđenja priprema namijenjenih mladim matematičarima diljem Lijepe Naše. Tako je nastala udruga Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić".

Slika 2.1: Sastanak na kojem se formirala udruga

Slika 2.2: Jedno od prvih predavanja subotom

Udruga se u početku bavila samo organizacijom ljetnih kampova mladih matematičara i tjednih predavanja iz natjecateljskih tema, no s vremenom se djelovanje udruge proširila i na druge aktivnosti poput zimskih škola, gostovanja Udruge u ostalim hrvatskim gradovima i školama u svrhu popularizacije matematike ili natjecateljskih predavanja, sudjelovanje na mnogim konferencijama i sajmovima...

Danas je Udruga jedan od najvažnijih hrvatskih promotora matematike i organizator raznih aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima željnim unaprjeđenja vlastitih matematičkih vještina, a članovi Udruge dolaze iz desetak različitih srednjih škola, iz svih dijelova Hrvatske. Važnosti i ugledu Udruge svjedoče razna gostovanja matematičara iz svih krajeva svijeta u ulogama mentora i predavača popularno-znanstvenih predavanja, velik broj prijava učenika na naše kampove, povjerenje u organiziranje važnih međunarodnih natjecanja lokalno u Hrvatskoj, ali i samostalna organizacija godišnjeg matematičkog natjecanja "Europski matematički kup" već desetak godina u kojem sudjeluje više od 30 država diljem svijeta!

2.2. Povijest kampova

Ljetni kamp najveća je i najvažnija aktivnost u organizaciji udruge MNM "Marin Getaldić" koja obuhvaća tjedan dana aktivnosti namijenjenih mladim matematičarima koji nastoje ostvariti sve svoje matematičke ambicije i interese. Kampovi se održavaju od 2010. godine te vjerujemo da kampovi svake godine postaju sve bolji. Godine iskustva starijih mentora, entuzijazam mladih mentora i dobra organizacija omogućili su polaznicima kampa sudjelovanje u raznim aktivnostima vezanima uz matematiku, ali i onima koji se odnose na razonodu.

Nakon nekoliko godina uspješne organizacije Ljetnih kampova, početkom 2014. godine održana je prva Zimska škola matematike u Domu Crvenog križa na Sljemenu. Zimska je škola jako slična Ljetnom kampu, iako manja, a na nju dolaze najbolji natjecatelji kako bi se pripremili za sezonu natjecanja iz matematike koja započinje školskim natjecanjem početkom drugog polugodišta.

Konačno, 2018. godine osmišljena je Matematička konferencija za srednjoškolce kao nenatjecateljska verzija Ljetnog kampa u kojoj projekti zauzimaju i jutro i popodne svakog dana. Osim toga, Matematička konferencija stvara jedinstvene prilike za učenike koji su zainteresirani za matematiku izvan školskih i natjecateljskih okvira, te im omogućava prezentaciju samostalnog rada kao i na *pravim* konferencijama.

Jedan od ciljeva svih kampova je povezivanje mladih matematičara diljem Hrvatske te stvaranje novih prijateljstava i poznanstava među mladima koji dijele isti interes. Stoga, uz matematičke, na kampovima se održavaju i razne aktivnosti koje omogućavaju druženje uz kvalitetno provedeno vrijeme, poput raznih sportova i društvenih igara.

2.3. Lokacija i vrijeme održavanja

Ovogodišnji, 15. po redu Ljetni kamp održan je u Kaštel Štafiliću. Gotovo svi učenici i mentori bili su smješteni u Učeničkom domu srednje škole "Braća Radić" u kojem su održane večernje aktivnosti, a predavanja i projekti su se održavali u Srednjoj školi "Braća Radić" smještenoj pored doma.

Učenički dom Srednje škole "Braća Radić" [1]

Srednja škola "Braća Radić" u Kaštel Štafiliću [2]

[1]Izvor fotografije: Web stranica Srednje škole "Braća Radić"
[2]Izvor fotografije: Portal grada Kaštela

2.4. Aktivnosti na kampu

Kao i inače, glavne su aktivnosti na kampu bile jutarnja predavanja u trajanju od 4 sata te popodnevni projekti. Ove smo godine, uz standardna predavanja iz algebre, teorije brojeva, geometrije i kombinatorike, dodali novo X predavanje. Riječ je o predavanjima koji miješaju različite grane natjecateljske matematike. Svako jutro, nakon doručka, učenici su slušali detaljno predavanje koje obrađuje određenu temu natjecateljske matematike. Učenici su na ovome kampu bili podijeljeni u šest grupa ovisno o uzrastu i predznanju, te u "MEMO grupu" koja se pripremala za predstojeće natjecanje. Osnovna ideja predavanja je da mentor prenese ideju nekog teorema ili načina rješavanja zadataka učenicima. Tome uvelike pomaže činjenica da su mentori uglavnom bivši natjecatelji s iskustvom rješavanja natjecateljskih zadataka pa se i sami prisjećaju zadataka koje su rješavali i predavanja kojih su slušali. Uz zadatke, za predavanja su pripremljeni i hintovi koji su tu da učenike koji su proveli duže vrijeme na zadatku pomognu usmjeriti na pravi smjer, ali i izvori zadataka kako bi učenici i nakon predavanja mogli provjeriti svoje rješenje.

Nakon predavanja, učenici su se uz ručak imali priliku odmoriti i zabaviti prije projekata. Projekti su, s druge strane, detaljnije analizirali određene teme vezane uz natjecateljsku, primijenjenu ili pak fakultetsku matematiku. Svaki je polaznik kampa na početku kampa odabrao jedan od ponuđenih raznovrsnih projekata te na njemu radio tijekom četiri popodneva do kraja kampa, učeći tako neke zanimljive i detaljnije informacije o odabranoj temi.

Svaki dan su se dan nakon večere odvijale raznovrsne aktivnosti, kao što su Q&A, Pub kviz i Estimathon, natjecanje u procjenjivanju te Powerpoint karaoke. Nakon organiziranih zajedničkih aktivnosti svi su sudionici imali slobodno vrijeme tijekom kojeg su se mogli družiti i bolje upoznati igrajući razne društvene igre kao što su mafija, Blotto, bela, Resistance, Exploding kittens, kockice (liars dice), Codenames ...

Također, jedno vrlo specijalno jutro nije bilo predavanja (odnosno učenici su bili slobodni), međutim, to su popodne, umjesto projekata, učenici se mogli okušati u već tradicionalnom ekipnom natjecanju Reli, dok su ozbiljniji natjecatelji sudjelovali na još jednom izdanju ELMO-a. Ispod možetete vidjeti kako je raspored izgledao:

RASPORED AKTIVNOSTI - LJETNI KAMP 2025.

	četvrtak 7.8.	petak 8.8.	subota 9.8.	nedjelja 10.8.	ponedjeljak 11.8.	utorak 12.8.	srijeda 13.8.	četvrtak 14.8.
07:00								
08:00		DORUČAK	DORUČAK	DORUČAK	DORUČAK	DORUČAK	DORUČAK	DORUČAK
09:00		PREDAVANJA	PREDAVANJA	SLOBODNO VRIJEME	PREDAVANJA	PREDAVANJA	PREDAVANJA	ODLAZAK
10:00								
11:00				*KFMO*				
12:00								
13:00		RUČAK	RUČAK	RUČAK	RUČAK	RUČAK	RUČAK	
14:00	DOLAZAK	PROJEKT / MEMO predavanja	PROJEKT / MEMO predavanja	RELI / ELMO	PROJEKT / MEMO predavanja	PROJEKT / MEMO predavanja	PROJEKT članak za knjigu / MEMO predavanja	
15:00								
16:00								
17:00								
18:00								
19:00	VEČERA	VEČERA	VEČERA	VEČERA	VEČERA	VEČERA	VEČERA	
20:00	Otvaranje							
21:00	Igre upoznavanja	Q&A / *Kahoot*	Estimathon / *Comedy night*	PZ1 / *Matematička potjera*	Kviz	PZ2 / *PPT karaoke*	ZATVARANJE KAMPA	
22:00								
23:00								
00:00								

2.5. Popis mentora

Martin Vrbovčan	Matej Vojvodić	Simeon Stefanović
Dario Vuksan	Emanuel Bajamić	Marija Dora Marodi
Mislav Brnetić	Patrik Cvetek	Zvonko Andrijević
Gabriel Čajsa	Adrian Grbac Lacković	Antonia Čović Kaćunić
Artur Garifullin	David Lang	Ivan Miošić
Jurica Špoljar	Karlo Pogelšek	Lana Milani
Lucija Relić	Marko Hrenić	Ivan Premuš
Karlo Jokoš		

2.6. Ovaj kamp - u slikama

Slika 2.3: Jutarnja predavanja

Slika 2.5: Projekt

Slika 2.4: Prvo popularno-znanstveno predavanje

Slika 2.6: Drugo popularno-znanstveno predavanje

Slika 2.7: ELMO pisanje

Slika 2.8: Pobjednici Estimathona

Slika 2.9: Kviz općeg znanja

Slika 2.10: Pobjednici i večina sastavljača ELMO-a

Slika 2.11: Pobjednici kviza

Slika 2.12: Zabava

I. Zadaci s predavanja

3. Zadaci za prvu grupu

3.1. G1: Mislav Plavac - Sličnost i sukladnost

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

U matematici volimo imat neku poveznicu među brojevima ili nekim drugim objektima, ta poveznica je najčešće znak jednakosti, neki izraz koji vrijedi poput Pitagorinog poučka, tj. da je $a^2 + b^2 = c^2$ za pravokutan trokut u kojem su a, b katete, a c hipotenuza. U geometriji isto tako želimo imati jednakost, ali iz semantičkih razloga to ne zovemo jednakost, nego **sukladnost**. Sada, kako znamo da su dva trokuta sukladna?

Propozicija 3.1.1: Sukladnost trokuta

Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u:
- dvjema stranicama i kutu među njima (**SKS poučak**)
- jednoj stranici i dvama kutevima uz nju (**KSK poučak**)
- svima trima stranicama (**SSS poučak**)
- dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj od njih (**SSK poučak**)

Tvrdnju da su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ sukladni zapisujemo $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$, pri čemu je $\cong$ oznaka sukladnosti.

Ovu tvrdnju možemo proširiti i na *skoro jednakost* odnosno **sličnost**.

Propozicija 3.1.2: Sličnoat trokuta

Dva su trokuta slična ako:
- im je jedan par stranica proporcionalan i kutevi što ih zatvaraju ti parovi međusobno jednaki (**SKS poučak**)
- su dva kuta jednog trokuta jednaka odgovarajućim kutevima drugog trokuta (**KK poučak**)
- su im odgovarajuće stranice proporcionalne (**SSS poučak**)

Tvrdnju da su trokuti $\triangle DEF$ i $\triangle D_1E_1F_1$ slični zapisujemo $\triangle DEF \sim \triangle D_1E_1F_1$, pri čemu je $\sim$ oznaka sličnosti. Omjer odgovarajućih stranica dvaju sličnih trokuta jest stalan (za te trokute) i naziva se *koeficijentom sličnosti.*

Na natjecanjima, sukladnost i sličnost su često korisni alati u raznim geometrijskim situacijama te ih dokazujemo/pronalazimo koristeći neke već poznate teoreme, tvrdnje ili metode kojih ćemo se ukratko prisjetiti.

- vršni kutovi su jednaki, sukuti su suplementarni (tj. zbroj im je 180°), kutovi s paralelnim kracima (kutevi uz presječnicu) su jednaki, a kutovi s okomitim kracima su ili jednaki ili suplementarni

- središnji kut kružnice dvostruko je veći od pripadnog obodnog kuta, svi obodni kutovi nad istim lukom su jednaki, a obodni kutovi nad suprotnim lukovima su suplementarni

- vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva unutarnja kuta trokuta

- središte trokutu upisane kružnice je sjecište simetrala svih kutova, a središte opisane je sjecište simetrala svih stranica trokuta

- spojnica polovišta dvije stranice trokuta naziva se srednjicom i ona je paralelna s trećom stranicom i jednaka polovici njene duljine

- obodni kut nad promjerom je pravi (Talesom teorem), vrijedi obrat (ako je $\overline{AB}$ proizvoljna dužina, tada je skup svih točaka T takvih da je $\angle ATB$ pravi kut kružnica s promjerom $\overline{AB}$)

- svaka je točka na simetrali kuta manjega od $180°$ jednako udaljena od krakova tog kuta (pod udaljenosti točke i pravca podrazumijevamo udaljenost točke i nožišta okomice iz točke na taj pravac)

- svaka je točka simetrale dužine jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine

- zbroj unutarnjih kutova u općenitom mnogokutu s n stranica je $(n-2)\cdot 180°$ (ako je mnogokut pravilan, svi unutarnji kutovi su mu jednaki pa je svaki veličine $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$), zbroj vanjskih kutova svakog mnogokuta je $360°$

Primjer 1. **Srednjica trokuta** je dužina koja spaja dva polovišta stranica u trokutu. Pokažite da je paralelna s trećom stranicom te jednaka polovini njene duljine.

Primjer 2. **(Svojstvo simetrale kuta u trokutu)** Ako u trokutu $\triangle ABC$ simetrala kuta $\angle BAC$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki K, tada vrijedi $|BK| : |KC| = |BA| : |AC|$.

Rješenje 1. Povucimo paralelu s pravcem AK kroz točku C; ta paralela siječe pravac AB u točki L. Tada zbog jednakosti kutova uz presječnicu slijedi $\angle ACL = \angle CAK = \angle KAB = \angle ALC$, pa je trokut $\triangle CAL$ jednakokračan, tj. $|AL| = b$. S druge strane, zbog $AK \parallel CL$ slijedi $\triangle KBA \sim \triangle CBL$, tj.

$$\begin{aligned}
\frac{|BK|}{|BC|} &= \frac{|BA|}{|BL|} \\
\frac{m}{m+n} &= \frac{c}{c+b'} \\
mc + mb &= mc + nc \\
m : n &= c : b
\end{aligned}$$

□

Zadaci za samostalni rad

1. Nad katetom $\overline{AC}$ i hipotenuzom $\overline{AB}$ pravokutnog trokuta $\triangle ABC$ konstruirani su kvadrati $ACFG$ i $ADEB$. Dokažite da je $|CD| = |BG|$.

2. Neka je točka T unutar kružnice k i neka se tetive kružnice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku u T. Dokažite da je $|AT| \cdot |TC| = |BT| \cdot |TD|$ (umnošci s lijeve i desne strane jednakosti se nazivaju *potencijom točke* T u odnosu na k).

3. U trokutu ABC je $|AB| = 30$mm i $|AC| = 60$mm. Iz točke D na stranici $\overline{AC}$ nacrtan je pravac koji stranicu $\overline{AB}$ siječe u točki E tako da je $|\angle ADE| = |\angle CBA|$. Odredite $|AD|$ i $|AE|$ ako je $|AE|$ dulja od $|AD|$ za 6mm.

4. Dan je paralelogram $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ odabrana je točka K tako da je $|AK| : |AB| = 5 : 7$, a na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka N tako da je $|DN| : |NC| = 2 : 3$. U kojem omjeru dužina $\overline{KN}$ dijeli dijagonalu $\overline{BD}$, računajući od točke D?

5. Zadan je trokut ABC. Na stranici $\overline{AC}$ zadana je točka N tako da je $|AN| = 28\text{cm}$ i $|NC| = 12\text{cm}$. Na stranici $\overline{BC}$ zadana je točka M tako da je $|BM| = 14\text{cm}$ i $|MC| = 16\text{cm}$. Površina četverokuta $ABMN$ iznosi 252cm^2. Izračunajte površinu trokuta MNC.

6. Pokažite da se u četverokutu $ABCD$ dijagonale raspolavljaju ako i samo ako je taj četverokut paralelogram. (Trebate dokazati oba smjera.)

7. Pokažite **Euklidov poučak**: Neka je zadan pravokutni trokut ABC s pravim kutem u točki C te neka je D nožište visine iz vrha C na hipotenuzu AB. Neka su $p = |BD|$ i $q = |AD|$ duljine odsječaka na hipotenuzi. Tada je $a = \sqrt{cp}$, $b = \sqrt{cq}$ i $v = \sqrt{pq}$

8. Nad stranicama paralelograma $ABCD$ konstruirani su prema van kvadrati te neka su P, Q, M, N središta dijagonala tih kvadrata sa stranicama redom $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$. Dokažite da je i četverokut $PQMN$ također kvadrat.

9. Visina i težišnica trokuta $\triangle ABC$ iz vrha A dijeli kut $\angle BAC$ na tri jednaka dijela. Odredite sve kuteve trokuta.

10. Pokažite **Bonerov poučak**: Neka je ABC takav da je $\beta = 2\alpha$. Ako je a duljina stranice nasuprot kuta α, b duljina stranice nasuprot kuta β te c duljina treće stranice, tada vrijedi $b^2 = a^2 + ac$.

11. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ šiljastokutnog trokuta ABC s vanjske strane konstruirani su kvadrati $ABLK$ i $ACMN$. Dokažite da vrijedi $|KN| = 2|AP|$, gdje je P polovište dužine $\overline{BC}$.

12. Duljina srednjice trapeza iznosi 4, a kutovi uz jednu osnovicu su $40°$ i $50°$. Odredite duljine osnovica ako je udaljenost njihovih polovišta jednaka 1.

Teži zadaci

13. Jedan kut pravokutnog trokuta ABC je $30°$. U polovištu S hipotenuza $\overline{AB}$ podignuta je okomica na hipotenuzu i njezino je sjecište s duljom katetom točka D. Dokažite da je dužina $\overline{SD}$ tri puta kraća od dulje katete.

14. Zadan je pravac p i na njemu točke A, B, C i D (u tom poretku). Točkama A i B povuku se dvije usporednice, a točkama C i D druge dvije usporednice koje sijeku prve dvije i čine paralelogram. Dokažite da sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p ne ovise o izboru usporednica kroz A i B, odnosno C i D.

15. Dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ trapeza $ABCD$ sijeku se u točki O. Ako su dane površine trokuta ΔABO zadana s P_1 i ΔCDO s P_2, kolika je površina trapeza?

16. Dan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{CD}$ dana je točka E, a na stranici $\overline{BC}$ dana je točka F takva da $\angle BAF = \angle FAE$. Dokažite da je $|BF| + |DE| = |AE|$.

17. Nad katetama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ pravokutnog trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati $CBDE$ i $ACFG$. Pravac AD siječe katetu $\overline{BC}$ u točki M, a pravac BG katetu $\overline{AC}$ u točki N. Pravci AD i BG sijeku se u točki Q. Dokažite da je površina četverokuta $MCNQ$ jednaka površini trokuta ABQ.

3.2. C1: Ivan Premuš - Dirichletov princip

Predavanje Hintovi Rješenja

Prvo ću malo ja

Dirichletov princip jedan je od najjednostavnijih kombinatornih pravila, ali često je vrlo koristan alat u rješavanju matematičkih zadataka raznih težina. Ime je dobio po njemačkom matematičaru J. P. G. Lejeuneu Dirichletu koji je ga formalizirao i često ga koristio u svom radu u područjima teorije brojva i matematičke analize. Inače je poznat i kao princip zečeva i kaveza ili princip golubinjaka (eng. *pigeonhole principle*).

U najjednostavnijem obliku, mogli bismo ga izreći na sljedeći način:

Teorem 3.2.1: Dirichletov princip

Ako $n+1$ kuglicu rasporedimo u n kutija, tada postoji barem jedna kutija u kojoj se nalaze barem dvije kuglice.

Dokaz. Tvrdnju dokazujemo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, to jest da se u svakoj kutiji nalazi jedna ili nijedna kuglica. Tada bi kuglica bilo najviše n, što je kontradikcija. $\square$

Iako se čini da je Dirichletov princip očit i da je dokaz koji smo dali nepotreban i suvišan, važno je sve tvrdnje koje koristimo precizno izraziti i dokazati. Uz to, ponekad se u zadatku čini da je rješenje jednostavno očito i može biti teško smisliti argument za takve tvrdnje. Dirichletov princip je često koristan alat u takvim situacijama, a dani dokaz dobra ilustracija načina dokazivanja "očitih" tvrdnji.

Primijetimo da tvrdnja sigurno vrijedi i za više od $n+1$ objekata, štoviše, ako imamo $kn+1$ objekata koje treba smjestiti u n kutija, sigurno postoji barem jedna s barem $k+1$ predmeta.

Često će formulacija nekog zadatka navoditi na ideju korištenja Dirichletovog principa. Izazov je odrediti što će u zadatku biti "kuglice", a što "kutije".

Primjer 1. Johann je vrlo neuredan matematičar, ima 3 para plavih, 2 para crnih i 6 parova žutih čarapa, ali sve su čarape nesparene i razbacane po ormaru. Rano jutro, pola šest, Johann u mraku izvlači čarape iz ormara. Koliko čarapa najmanje mora izvući da bude siguran da ima barem jedan par iste boje?

Rješenje 1. Johann mora izvući 4 čarape. Budući da ima čarape u tri boje, treba mu $3+1$ čarapa kako bi po Dirichletovom principu mogao biti siguran da ima dvije istobojne. $\square$

Primjer 2. Peter voli planinariti i šetati šumama. Prilikom jedne svoje šetnje nekom velikom šumom, zaključio je da je broj stabala u šumi zasigurno veći od broja listova na bilo kojem stablu. Uz pretpostavku da je Johannov zaključak točan i ako je poznato da u šumi nema golog stabla, dokažite da postoje barem dva stabla s jednakim brojem listova. Što ako postoji golo stablo?

Rješenje 2. Neka je broj stabala u šumi n. Broj listova na nekom stablu može biti $1, 2, \ldots, n-1$. Hoćemo n stabala rasporediti u $n-1$ mogućnosti. Zaključujemo da po Dirichletovom principu moraju postojati dva stabla s jedakim brojem listova.

Ako postoji golo stablo, tada imamo n mogućnosti za broj listova, pa tvrdnja zadatka ne mora nužno vrijediti. $\square$

Navedimo za kraj jednu generalizaciju Dirichletovog principa.

Teorem 3.2.2: Dirichletov princip - jaka forma

Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmet.

Dokaz je sličan dokazu prethodnog teorema pa ga izostavljamo.

Sad je na vama red

1. Gustav je na ploču napisao 15 prirodnih brojeva. Dokažite da se među njima mogu odabrati dva čija je razlika djeljiva s 14.

2. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ niz proizvoljnih cijelih brojeva. Dokažite da u tom nizu postoji nekoliko uzastopnih članova čiji je zbroj djeljiv s 15.

3. Škola ima 1000 učenika i 30 razreda. Neka je m broj učenika u razredu s najviše učenika. Odredite najmanji mogući m.
   Napomena. Primijetite da u ovom zadatku nije dovoljno dokazati koliko iznosi najmanji mogući broj, već je potrebno konstruirati i primjer za koji se taj broj postiže.

4. Na neku je konvenciju došlo 500 posjetitelja. Neki su se međusobno rukovali. Dokažite da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

5. Na prozoru oblika kvadrata stranice duljine 1 m, nalazi se 51 komarac. Može li Željko okruglom metlicom polumjera $\frac{1}{7}$ m jednim udracem ubiti 3 komarca?

6. U svako polje 5×5 tablice upisujemo jedan od brojeva $-1, 0, 1$ te zbrajamo brojeve po stupcima, retcima i dijagonalama. Dokažite da će među tim zbrojevima dva biti jednaka.

7. Anastazija je u pravokutnom koordinatnom sustavu odabrala 5 točaka sa cjelobrojnim koordinatama. Dokažite da među njima postoje dvije takve da polovište dužine koja ih spaja ima cjelobrojne koordinate.

8. Na predavanje subotom došlo je šest mladih matematičara. Dokažite da postoje ili tri međusobna poznanika ili trojka ljudi među kojima se nikoje dvije osobe ne poznaju.

9. Dano je 27 točaka raspoređenih u 9 stupaca i 3 retka. Svaka točka obojena je crveno ili plavo. Dokaži da postoji pravokutnik kojem su vrhovi iste boje.

10. Kotač za rulet podjeljen je na 36 isječaka. U njih su nekim redom upisani brojevi 1 do 36. Dokažite da postoje 3 susjedna isječka takva da je zbroj u njih upisanih brojeva najmanje 56.

11. Dokažite da među bilo koja tri cijela broja možemo odabrati dva tako da je $a^3b - ab^3$ djeljivo s 10.

12. Kvadratna ploča podijeljena je na 5×5 jediničnih kvadrata. Na nju postavljamo osam triomina oblika slova L i to tako da samo jedno polje ploče ostane neprekriveno. Odredi koja sve polja kvadratne ploče mogu ostati neprekriveni pri takvom popločavanju.

13. Dano je 599 žutih i 301 plava kuglica. Može li se te kuglice poredati u niz tako da je broj kuglica između bilo koje dvije plave kuglice različit od 2 i od 5?

14. Neka je n proizvoljan prirodan broj.
    (a) Dokažite da postoji višekratnik broja n koji se sastoji samo od znamenaka 0 i 1.
    (b) Dokažite da takvih višekratnika ima beskonačno mnogo.

15. Dokažite da postoji prirodan broj koji započinje znamenkama 192352458628, a djeljiv je brojem 2023.

16. U ravnini je dano 6 točaka tako da nikoje 3 ne leže na istom pravcu. Dokažite da postoji trokut čiji su vrhovi 3 od tih 6 točaka i čiji jedan kut nije manji od $120°$.

17. Povlačenjem pravaca paralelnih sa svakom stranicom, jednakostranični trokut stranice duljine n podijeljen je na n^2 jednakostraničnih trokuta stranice duljine 1. Koliko najviše dužina duljine 1 na dobivenoj mreži možemo obojiti u crveno tako da nikoje tri crvene dužine ne tvore jednakostranični trokut?

18. Zadano je 9 pravaca, od kojih svaki dijeli zadani kvadrat na dva trapeza čije su površine u omjeru $2 : 3$. Dokažite da barem 3 zadana pravca prolaze kroz istu točku.

19. Dvadesetero djece pohađa neku seosku školu usred Moldavije. Svaka dva djeteta imaju zajedničkog djeda. Dokažite da neki od djedova ima najmanje 14 unučadi u toj školi.

20. Za dva polja tablice 10×10 kažemo da su *prijateljska* ako imaju barem jedan zajednički vrh. U svako polje tablice upisan je po jedan broj manji ili jednak 10, tako da su brojevi u prijateljskim poljima relativno prosti. Dokaži da postoji broj koji se u toj tablici pojavljuje barem 17 puta.

21. Dano je 20 prirodnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_{20}$ tako da vrijedi

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_{20}.$$

Dokažite da među razlikama $a_j - a_k$ $(j > k)$ postoje barem četiri koje su međusobno jednake.

22. Dan je pravilni 2022-kut $A_1 A_2 \dots A_{2022}$. Koliko najviše vrhova pravilnog 2022-kuta možemo odabrati tako da nikoje četiri odabrane točke ne čine vrhove pravokutnika?

3.3. A1: Antonia Čović Kaćunić - Jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Na ovom predavanju proći ćemo osnovne metode rješavanja jednadžbi, posebno se fokusirajući na nelinearne (stupnja strogo većeg od 1).

Definicija 3.3.1

Potenciranje (u oznaci: a^n) aritmetička je operacija koja realni broj $a \in \mathbb{R}$ (bazu) množi samim sobom onoliko puta koliki je n (eksponent), za $n \in \mathbb{Z}$, odnosno $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ puta}}$.

Korjenovanje je potenciranje baze $a \in \mathbb{R}$ realnim eksponentom $n \in \mathbb{R}$ tj. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$.

Primjer 1. **Potenciranje i korjenovanje**
$2^3 = 8 \Leftrightarrow 2 = 8^{1/3} = \sqrt[3]{8}$
$4^3 = 64 \Leftrightarrow 2 = 64^{1/3} = \sqrt[3]{64} \Leftrightarrow 2 = 8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2}$

Teorem 3.3.2: Svojstva potencija

Neka su $a, b, m, n \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad$ za $a \neq 0$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Primjer 2. **Svojstva potencija**
$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$
$5^3 \cdot 7^4 = 5^7$
$(5^3)^4 = 5^{3 \cdot 4}$
$(5 \cdot 6)^3 = 5^3 \cdot 6^3$

Definicija 3.3.3

Faktorizacija nekog izraza postupak je kojim se taj izraz zapisuje u obliku umnoška više faktora. Česte tehnike kad želimo faktorizirati neki izraz su:

- izlučivanje zajedničkog faktora
- grupiranje
- tzv. metoda srednjeg člana
- algebarski izrazi

Napomena: Metoda srednjeg člana

Faktorizacija je korisna tehnika jer njenom primjenom zbroj (čije pribrojnike ne smijemo kratiti u razlomcima i preko kojih nerijetko ne možemo zaključiti puno o traženim vrijednostima nepoznanica) zapisujemo pomoću umnoška (čije faktore smijemo kratiti u razlomcima i preko čijih faktora možemo zaključiti nešto o traženim vrijednostima nepoznanica; npr. ako imamo $(x-1)(x+2)=0$, odmah možemo zaključiti da $x_1=1, x_2=-2$).

Napomena: Metoda srednjeg člana

Takozvana metoda srednjeg člana metoda je rastava linearnog člana kvadratne jednadžbe kako bi novodobiveni izraz bio pogodan za faktorizaciju.
Tehnika je sljedeća:

- dobiveni izraz svedite na oblik $a^2x+bx+c$
- pronađite brojeve $a, b \in \mathbb{Z}$ td. $m+n=b$ i $m\cdot n=a\cdot c$
- tada je $bx=mx+nx$ što po izboru brojeva m, n, izraz $a^2x+bx+c$ svodi na oblik povoljan za faktorizaciju.

Primjer 3. Metoda srednjeg člana
Faktorizirajmo x^2+x-6.
Koristeći metodu srednjeg člana znamo da mora biti $m\cdot n=1\cdot(-6)=-6$ i $m+n=1$ pa je očito da $m=-2, n=3$. Dakle, $x^2+x-6=x^2-2x+3x-6=x(x-2)+3(x-2)=(x-3)(x-2)$.
Faktorizirajmo $6x^2+11x+4$.
Koristeći metodu srednjeg člana znamo da mora biti $m\cdot n=6\cdot 4=24$ i $m+n=11$ pa je očito da $m=3, n=8$. Dakle, $6x^2+11x+4=6x^2+3x+8x+4=3x(2x+1)+4(2x+1)=(3x+4)(2x+1)$.

Lema 3.3.4: OSNOVNI ALGEBARSKI IZRAZI

Neka su a, b $\in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada vrijedi:

- $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ (kvadrat binoma)
- $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b\pm 3ab^2+b^3$ (kub binoma)
- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ (razlika kvadrata)
- $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ (zbroj/razlika kubova) .

Primjer 4. Osnovni algebarski izrazi
$x^2-6x+9=(x-3)^2$
$x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$

Propozicija 3.3.5: KVADRATNA JEDNADŽBA

Kvadratna jednadžba je jednadžba oblika $f(x)=a^2x+bx+c$, gdje $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a\neq 0$.
Broj a zove se vodeći koeficijent, broj b je linearni koeficijent, a c je slobodni član.
Nultočke kvadratne jednadžbe $f(x)=a^2x+bx+c$ tj. rješenja od $a^2x+bx+c=0$ (tj. vrijednosti nepoznanice x za koju zaista vrijedi $a^2x+bx+c=0$) mogu se odrediti preko sljedeće formule: $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Primjer 5. Kvadratna jednadžba
Nađite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $x^2 + x - 6 = 0$
1. način (faktorizacija):
$x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$
2. način (formula):
$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -3$

Propozicija 3.3.6: HORNEROV ALGORITAM

Hornerov algoritam objasnit ćemo na primjeru. To je algoritam koji daje vrijednost polinoma u točki, a može se koristiti i za traženje cjelobrojnih nultočaka jednadžbi te čak može biti koristan kao alat u svrhu faktorizacije.

Napomena

Iako je Hornerov algoritam načelno definiran kao algoritam koji vrijedi za polinome, možemo ga primjenjivati i na funkcijama.

Primjer 6. Izračunajmo $f(3)$ za $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 8x - 5$.
Najprije zapišimo ono što nam je poznato: koeficijente uz nepoznanicu i $x = 3$. U „ nulti redak" zapisujemo koeficijente (koeficijent 3 uz x^3, koeficijent -2 uz x^2, koeficijent 8 uz x i slobodni član -5), a uz „ nulti stupac" zapisujemo vrijednost varijable za koju tražimo vrijednost funkcije (u našem slučaju pišemo 3 jer tražimo $f(3)$). Računanje provodimo na sljedeći način:
prvo u prvi stupac (označen plavom bojom u grafu) prepišemo vrijednost iz nultog retka
zatim računamo: $3 \cdot 3 - 2 = 7$ i broj 7 zapišemo u tablicu; zatim $3 \cdot 7 + 8 = 29$ i $3 \cdot 29 - 5 = 82$.

	3	−2	8	−5
3	3	7	29	82

Iz tablice čitamo da je $f(3) = 82$.

Napomena

Cjelobrojne nultočke polinoma djelitelji su slobodnog člana.
Također, Hornerov algoritam za traženje nultočaka u ovom obliku daje rješenje jedino ako postoje cjelobrojne nultočke polinoma (svejedno, korisno je znati ovaj algoritam: ako prolazi, našli smo nultočke, ako ne prođe, znamo da polinom nema cjelobrojnih nultočaka).

Napomena: Bézoutov teorem (eng. Factor Theorem)

Broj $a \in \mathbb{R}$ nultočka je polinoma $p \in \mathbb{R}[x]$ ako i samo ako je p djeljiv polinomom $x - a$ (tj. $(x-a)$ jedan je faktor u faktoriziranom obliku polinoma $p \in \mathbb{R}[x]$. (P.S) $p \in \mathbb{R}[x]$ je skup svih polinoma $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Primjer 7. Faktorizirajte $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$ i odredite nultočke tj. odredite za koje $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = 0$. Kako dani izraz ne možemo faktorizirati grupacijom članova i sličnim metodama, pokušajmo iskoristiti Hornerov algoritam.
Prvi korak je izjednačiti izraz s 0 tj. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6 = 0$ pa preko Hornerovog algoritma zapravo tražiti nultočke polinoma $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$ (Da je jedini cilj zadatka bio faktorizirati izraz, isto bismo polinom izjednačili s nulom (Zašto to baš tako radimo, zašto to možemo??? To možemo zbog Bézoutovog teorema. Najprije zapišimo ono što nam je poznato tj. koeficijente uz nepoznanicu. U „ nulti redak" zapisujemo koeficijente (koeficijent 1 uz x^4, koeficijent -2 uz x^3, koeficijent -5 uz x^2,

koeficijent 4 uz x i slobodni član 6), a uz „ nulti stupac” zapisujemo moguće vrijednosti vrijednost varijable x za koju $f(x)=0$; po prethodnoj napomeni znamo da su sve moguće cjelobrojne vrijednosti varijeble x djelitelji slobodnog člana tj. u našem slučaju broja 6 (dakle, u „ nulti stupac” upisujemo redom $1,-1,2,-2,3,-3,6,-6$ tj. upisujemo dok ne dođemo do rješenja. Postupak popunjavanja tablice:
$1\cdot 1-2=-1$, $1\cdot(-1)-5=-6$, $1\cdot(-6)+4=-2$, $1\cdot(-2)+6=8 \Rightarrow f(1)=8\neq 0$
$(-1)\cdot 1-2=-3$, $(-1)\cdot(-3)-5=-2$, $(-1)\cdot(-2)+4=6$, $(-1)\cdot 6+6=0 \Rightarrow f(-1)=0$

$$x^4-2x^3-5x^2+4x+6=0$$

	1	−2	−5	4	6
1	1	−1	−6	−2	8
−1	1	−3	−2	6	0

Dakle, za $x=-1 \Rightarrow x^4-2x^3-5x^2+4x+6=0$.
Dakle, $x^4-2x^3-5x^2+4x+6$ možemo zapisati kao$x^4-2x^3-5x^2+4x+6=(x+1)(1\cdot x^3-3\cdot x^2-2x+6)$, s tim da smo $1\cdot x^3-3\cdot x^2-2x+6$ dobili iz tablice (smanjili smo stupanj polinoma čije nultočke tražimo za 1 (naš polinom $x^4-2x^3-5x^2+4x+6$ stupnja je 4 pa je stupanj „ novog” polinoma jednak 3; koeficijente tog „ novog” polinoma dobijemo redom prepisujući brojeve iz retka koji kao zadnji element ima 0 tj. iz retka koji nam daje rješenje; u našem slučaju to su koeficijenti 1, -3, -2, 6 tj. dobijemo $1\cdot x^3-3\cdot x^2-2x+6$).
Sada želimo faktorizirati x^3-3x^2-2x+6. Ponavljamo opisani postupak za taj polinom.

$$x^3-3x^2-2x+6=0$$

	1	−3	−2	6
1	1	−2	−4	2
−1	1	−4	2	4
2	1	−1	−4	−2
−2	1	−5	8	−10
3	1	0	−2	0

$$x^3-3x^2-2x+6=(x-3)(x^2+0x-2)=(x-3)(x^2-2)=(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

Tražimo x za koji $f(x)=x^4-2x^3-5x^2+4x+6=(x+1)(x-3)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$. Dakle, $x_1=-1, x_2=3, x_3=\sqrt{2}, x_4=-\sqrt{2}$.

Napomena: SUSTAVI JEDNADŽBI

Česte metode pri rješavanju sustava jednadžbi su:

- supstitucija
- zbrajanje/oduzimanje/množenje jednadžbi (kako bismo pokratili jednu od nepoznanica u sustavu jednadžbi)

Zadaci

1. Kvadrati dvaju brojeva čija je aritmetička sredina 18, razlikuju se za 288. Koji su to brojevi?

Ljetni kamp mladih nadarenih matematičara 2022. godine, Lucija Relić - Jednadžbe

2. Dokažite da je razlika kvadrata dva neparna prirodna broja djeljiva s 8.

3. Dokažite da je zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv s 9.

4. Odredi sve uređene parove (a, b) cijelih brojeva za koje je $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{5}$.

Državno natjecanje 2023 godine, 7. razred

5. Odredite za koje $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

PMF- Elementarna matematika 1, skripta za vježbe

6. Pronađi sve parove prirodnih brojeva čija je razlika kvadrata 2023.

Županijsko natjecanje 2023. godine, 8. razred

7. Ako je $x + y = 1$ i $x^2 + y^2 = 2$, koliko je $x^4 + y^4$?

Županijsko natjecanje 2022. godine, 8. razred

8. Riješite sustav jednadžbi:

$$(x+y)^2 - z^2 = 1$$
$$(y+z)^2 - x^2 = 5$$
$$(z+x)^2 - y^2 = 10$$

.

Državno natjecanje 2017., 8.razred

9. (Identitet Sophie Germain) Faktorizirajte izraz $a^4 + 4b^4$.

10. Za vrijeme doručka svaki je član obitelji u svoju šalicu natočio i kavu i mlijeko te je napravio točno 1.8 decilitra bijele kave. Za izradu bijele kave svatko je od njih pomiješao kavu i mlijeko u drukčijem omjeru. Jedan je od članova u svoju šalicu natočio jednu osminu ukupne količine kave i jednu petinu ukupne količine mlijeka. Koliko je članova obitelji moglo biti na doručku ako je obitelj popila svu kavu i svo mlijeko?

Državno natjecanje 2024. godine, 7. razred

11. Neka su m i n prirodni brojevi i neka m nije djeljiv s 3. Dokaži da je razlika $n^3 - m^2n$ djeljiva s 3.

Županijsko natjecanje 2024. godine, 8. razred

12. Ako se brojnik nekog razlomka smanji za 8%, a nazivnik mu se poveća za 8%, novi razlomak bit će za 2 manji od početnog razlomka. Odredite vrijednost početnog razlomka.

Županijsko natjecanje 2024. godine, 7. razred

13. Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $3m^2 - 7n^2 = 9$.

Državno natjecanje 2024. godine, 8. razred

14. Trojica prijatelja uštedjeli su određen iznos novca. Kada bi prvi imao pet puta manje, drugi dva puta manje, a treći dva i pol puta manje vlastite ušteđevine, zajedno bi imali 160 kuna. Kada bi prvi imao dva puta manje, drugi četiri puta manje, treći tri puta manje vlastite ušteđevine, zajedno bi imali 240 kuna. Koliki je iznos ušteđevine trojice prijatelja?

Državno natjecanje 2019. godine, 7. razred

15. Odredite sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{5n^2-9}{2n+6}$ cijeli broj.

Državno natjecanje 2016. godine, 8. razred

3.4. N1: Gabriel Čajsa - Znamenke

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Definicija 3.4.1: Zapis broja u bazi b

n -teroznamenkasti broj $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ u bazi b pišemo kao $(\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1})_b$ što je jednako sumi $a_n \cdot b^{n-1} + \dots + a_k \cdot b^{k-1} + \dots + a_3 \cdot b^2 + a_2 \cdot b + a_1$ gdje su $a_1, a_2, \dots a_n < b$ i $a_n \neq 0$.

Definicija 3.4.2: Kongruencije

Kažemo da je a kongruentno s b modulo n ako vrijedi $n \mid a - b$, odnosno ako a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s n.

Riješeni primjeri

Primjer 1 (Županijsko 2018 - 4. razred, 1. zadatak)**.** Prirodni broj zovemo *babilonskim* ako je veći od 9 i ako je njegov zapis u sustavu s bazom 60 jednak njegovom dekadskom zapisu bez vodeće znamenke. Npr. broj 123 je babilonski jer je $123 = (23)_{60}$. Koliko ima babilonskih brojeva manjih od 10000?

Rješenje 1. Prvo primjetimo da je nemoguće da dvoznamenkasti broj bude babilonski. Naime, neka je $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj. kada bi taj broj bio babilonski moralo bi vrijediti $10a + b = b$ što je nemoguće jer bi iz tog slijedilo da je $a = 0$ što je kontradikcija. Dakle, imamo dva slučaja:

- Broj je troznamenkast: $\overline{abc}$. Sada vrijedi $100a + 10b + c = 60b + c$ što se svodi na $100a = 50b$ odnosno $2a = b$ i c je proizvoljan. Dakle, $a \in \{1, 2, 3, 4\}$ jer b mora biti manji od 9 te $c \in \{0, \dots, 9\}$ što je $4 \cdot 10 = 40$ kombinacija.
- Broj je četveroznamenkast: $\overline{abcd}$. Sada pak vrijedi $1000a + 100b + 10c + d = 3600b + 60c + d$ što se svodi na $1000a = 3500b + 50c$ odnosno $20a = 70b + c$. Kako su $20a$ i $70b$ djeljivi s 10 pa je $c = 0$. Dobivamo $2a = 7b$ pa kako je $2a$ paran broj, mora i b biti paran. Za $b = 0$ $a = 0$ što je nemoguće. Za $b = 2$ $a = 7$. Za $b \geq 4$ je $a \geq 14$ što je nemoguće. Dakle, četveroznamenkastih babilonskih brojeva ima 10, gdje su $a = 7, b = 2, c = 0$ i $d \in \{0, \dots, 9\}$.

Babilonskih brojeva manjih od 10000 ima 50, 40 troznamenkastih i 10 četveroznamenkastih.

□

Zadaci za samostalni rad

1. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve $\overline{abcd}$ koji su jednaki broju $\overline{dcba}$ u bazi 7.
2. Odredi sve brojeve n takve da je umnožak njegovih znamenaka u dekadskom zapisu $n^2 - 10n - 22$.
3. Dokaži da su u svakoj bazi brojevnog sustava svi brojevi oblika $10101, 101010101, 1010101010101, \dots$ složeni.
4. Odredi sve ne 200-znamenkaste prirodne brojeve (u dekadskom zapisu) koji su kvadrati prirodnih brojeva, a počinju s 99 devetki.
5. Dokaži da je broj sa 3^{2023} jedinica djeljiv sa 3^{2023}.

6. Neka je n prirodan broj. Broj A je broj od $2n$ znamenaka 4 i neka je B broj od n znamenaka 8. Dokaži da je $A + 2B + 4$ kvadrat prirodnog broja.

7. Neka je a prirodan broj i neka je b zbroj znamenaka broja a, i neka je c zbroj znamenaka broja b. Dokaži da vrijedi

$$a \equiv b \equiv c \pmod 9$$

8. Dokaži da postoji barem 666 prirodnih brojeva sa 2006 znamenaka koji su složeni, te koji imaju jednu sedmicu i sve ostale jedinice.

9. Odredi sve kvadrate prirodnih brojeva kojima su sve znamenke 0 osim dvije, a jedna od njih je 3.

3.5. X1: Artur Garifullin - A ka logika

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Kratki uvod

U ovom predavanju upoznat ćete se s osnovama matematičke logike i raznim načinima dokazivanja. Za razliku od predavanja koje ste do sada slušali, bit će nam bitnije kako i na koji način nešto dokazati nego ono što zapravo dokazujemo. Cilj ovog predavanja je da naučite razlikovati valjan od nevaljanog dokaza.

Definicija 3.5.1

Sud je izjavna rečenica za koju se može utvrditi je li istinita ili lažna (neistinita).

Primjer 1. • Izjava ”$0 = 1$” je sud, i to lažan.
• Izjava ”$x + 2 = 8$” nije sud jer joj se ne može utvrditi je li istinita. ili lažna (ako ne znamo koliki je x).
• Izjava "Ova izjava je lažna" nije sud, jer nije niti istinita niti lažna. Naime, kad bi ta izjava bila istinita, onda bi vrijedilo da je "Ova izjava lažna", tj. da nije istinita, a nemoguće je da je istovremeno istinita i nije istinita. Kad bi ta izjava bila lažna, onda ne bi vrijedilo da je "Ova izjava lažna", tj. izjava bi bila istinita, pa ponovno dobivamo da je istovremeno i istinita i nije istinita.
• Izjava "Broj 0.0001 je malen" nije sud jer pojam "malenog broja" nije dobro definiran.

Definicija 3.5.2

Konjunkcija sudova A i B je složeni sud koji je istinit točno onda kada su istiniti i sud A i sud B. Konjunkciju označavamo sa $A \wedge B$, te čitamo "A i B".

Definicija 3.5.3

Disjunkcija sudova A i B je složeni sud koji je lažan samo onda kada su lažni i sud A i sud B. Disjunkciju označavamo sa $A \vee B$, te čitamo "A ili B".

Definicija 3.5.4

Implikacija sudova A i B je složeni sud koji je lažan samo onda kada je A istinit, a B lažan. Implikaciju označavamo sa $A \Rightarrow B$, te čitamo "A povlači B" ili "A implicira B" ili "Ako A, onda B" ili "Iz A slijedi B" ili "B je nužan uvjet za A" ili "A je dovoljan uvjet za B"

Definicija 3.5.5

Ekvivalencija sudova A i B je složeni sud koji je istinit kada su i sud A i sud B oba istiniti, te kada su i sud A i sud B oba lažni. Ekvivalenciju označavamo sa $A \Leftrightarrow B$, te čitamo “A je ekvivalentno sa B” ili “A vrijedi ako i samo ako vrijedi B” (kraće “A vrijedi akko vrijedi B”) ili “A je nužan i dovoljan uvjet za B”.

Uočimo da ekvivalenciju zapravo čine dvije implikacije, $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$, koje su ili obje istinite ili obje neistinite. Kada se u zadacima traži da se dokaži da vrijedi tvrdnja A ako i samo ako (akko) vrijedi tvrdnja B, podrazumjeva se da se dokažu dvije implikacije: $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$.

Definicija 3.5.6

Negacija suda A je sud koji je istinit samo onda kada je sud A lažan. Negaciju označavamo sa $\neg A$, te čitamo "nije A" ili "ne A".

Definicija 3.5.7

Kažemo da su složeni sudovi A i B jednaki ako i samo ako je sud $A \Leftrightarrow B$ tautologija. Tada pišemo $A \equiv B$.

Sljedeća tablica prikazuje vrijednosti logičkih veznika za sve moguće kombinacije istinitosnih vrijednosti sudova A i B.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
i	i	i	i	i	i
i	n	n	i	n	n
n	i	n	i	i	n
n	n	n	n	i	i

Teorem 3.5.8: obrat po kontrapoziciji

Vrijedi $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

Primjer 2. Dokaži tvrdnju: Ako je n^2 paran broj, onda je n paran broj.

Rješenje 1. Dokazujemo tvrdnju pomoću kontrapozicije.
Originalna tvrdnja je oblika:

$$A \Rightarrow B \quad \text{gde je } A: \text{"}n^2 \text{ je paran"}, \quad B: \text{"}n \text{ je paran"}.$$

Kontrapozicija tvrdnje glasi:

$$\neg B \Rightarrow \neg A, \quad \text{tj. ako je } n \text{ neparan, onda je } n^2 \text{ neparan.}$$

Pretpostavimo da je n neparan broj. Tada postoji cijeli broj k takav da je:

$$n = 2k + 1.$$

Kvadriranjem dobijamo:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1,$$

što je oblik neparnog broja.
Dakle, ako je n neparan, onda je i n^2 neparan.

$\square$

svođenje na kontradukciju

Ako nismo sigurni kako dokazati da neka implikacija vrijedi, možda je lakše pokušati dokazati da njena negacija ne vrijedi. Sjetimo se: to znači da istovremeno vrijedi uzrok (pretpostavka), a ne vrijedi posljedica (tvrdnja). To napravimo tako da pretpostavimo da vrijedi negacija tvrdnje i dođemo do neke tvrdnje koja nema smisla, tj. do kontradikcije.

Primjer 3. Dokažite da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Rješenje 2. Pretpostavimo suprotno: neka je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da se može napisati u obliku neskrativog razlomka $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, što znači da su m i n relativno prosti prirodni brojevi (nemaju zajedničnkih djelitelja). Sada tu jednakosti možemo kvadrirati i pomnožiti sa n^2, odakle je $2n^2 = m^2$. Ako je kvadrat nekog broja djeljiv s 2, onda je i taj broj djeljiv s 2, pa znamo da je m djeljiv s 2. Dakle m možemo napisati $m = 2k$, gdje je k neki prirodni broj. Ako to uvrstimo u jednakost imamo $n^2 = 2k^2$ i odvade istim postupkom zaključivanja zaključimo da je n djeljiv s 2. Sada smo dobili da su i m i n djeljivi s 2, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom koja kaže da su m i n relativno prosti. Dakle, $\sqrt{2}$ je iracionalan broj. □

Zadaci za samostalni rad

1. Dokažite sljedeći identitet $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

2. Dokažite sljedeći identitet $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

3. Dokažite : četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

4. Dan je četverokut $ABCD$ u kojem ne vrijedi $a+c = b+d$ za duljine njegovih stranica. Dokažite da tada četverokut nije tangencijalan.

5. Dokažite da ako je $x^2 - 6x + 5$ paran broj, onda je x neparan broj.

6. Dokažite da ne postoje cijeli brojevi x, y i z takvi da je $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 90$.

7. Dokažite da $\sqrt{3}$ nije racionalan broj.

8. Dokažite da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

9. Pinokio ponedjeljkom i utorkom govori istinu, subotom uvijek laže, a ostale dane u tjednu ili govori istinu ili laže. Na pitanje "Koji ti je predmet u školi najdraži?" šest uzastopnih dana u tjednu davao je redom sljedeće odgovore: "Povijest", "Matematika","Zemljopis", "Fizika", "Kemija", "Fizika". Koji predmet Pinokio najviše voli? Objasnite svoj odgovor.

10. Dokažite obrat Pitagorinog poučka: ako za duljine a, b i c stranica trokuta ABC vrijedi $a^2+b^2 = c^2$, onda je taj trokut pravokutan.

11. Odredite formulu F takvu da formula

$(P \wedge (Q \Leftrightarrow \neg R)) \implies ((\neg P \vee F) \wedge (Q \vee R))$

bude tautologija (da je uvjek istinita bez obzira jesu li sudovi P, Q, R istiniti/lažni).

12. Za prirodni broj n označimo s R_n broj čiji se dekadski zapis sastoji od n znamenki 1. Dokaži tvrdnju: ako je R_n prost broj,onda je i n prost broj.

13. Neka je T težište trokuta ABC, a P polovište stranice AC. Pravac kroz točku T paralelan s pravcem BC siječe stranicu AB u točki E.

Dokaži da jednakost $\angle AEC = \angle PTC$ vrijedi ako i samo ako vrijedi $\angle ACB = 90°$.

4. Zadaci za drugu grupu

4.1. G2: Ivan Premuš - Hvatanje kutova

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Angle chase ili hvatanje kutova osnovna je metoda korištena u geometrijskim zadacima na svim razina natjecanja, od školske do olimpijske razine. Često je važna kao jedan od koraka u rješenju složenijeg zadatka i svaki bi natjecatelj trebao moći samopouzdano njome baratati.
U osnovi, ova se metoda sastoji u računanju kutova na skici i izražavanju čim većeg broja kutova nepoznate veličine preko što manje referentnih kutova. Podsjetimo se stoga najprije nekih korisnih činjenica:

1. Vršni kutovi su jednaki
2. Zbroj kutova u trokutu je 180°
3. Sukuti su suplementarni (zbroj im je 180°)
4. Obodni kutovi nad istom tetivom su jednaki i obodni kut nad tetivom je dvostruko manji od središnjeg kuta nad tetivom
5. Kutovi uz presječnicu dva paralelna pravca su jednaki
6. Kut nad promjerom je pravi i obrat vrijedi (ovo je Talesov teorem)
7. Vanjski kut trokuta jednak je zbroju preostala dva

Koristan je sljedeći teorem.

Teorem 4.1.1: O tetivi i tangenti

Neka je k kružnica, A, B točke na k i t tangenta na k u točki A. Kut između tetive $\overline{AB}$ i tangente t jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.

Nadalje, objekt koji se na prvi pogled čini iznimno jednostavan, a pokazuje se kao moćan alat u hvatanju kutova je tetivni četverokut.

Definicija 4.1.2: Tetivni četverokut

Za četverokut kažemo da je tetivni ako mu svi vrhovi leže na nekoj kružnici.

Važna stvar za tetivni četverokut je što za njegove kutove vrijede neke jednostavne, a vrlo korisne relacije. Neka je ABCD tetivni četverokut. Sasvim je jasno da vrijedi da je

$$\angle ACB = \angle ADB,$$

to su obodni kutovi nad istom tetivom $\overline{AB}$. Slično vrijedi i za ostale stranice i pripadne kutove. Također, za nasuprotne kutove vrijedi da im je zbroj $180°$ (razmislite zašto). Ono što je vrlo moćno je da vrijede i obrate ovih tvrdnji, to jest ako uspijemo pokazati jednu od gornjih relacija znamo da je promatrani četverokut tetivan. Prepoznavanje tetivnih četverokuta iznimno je važna vještina za angle chase (a i općenito) koja će vam dobri doći na svim razinama natjecanja.

Primjer 1. Neka je dužina $\overline{AD}$ promjer kružnice, a B i C točke na kružnici takve da se dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku unutar kružnice pod kutom od $60°$. Ako je točka S središte kružnice, dokažite da je trokut BCS jednakostraničan.

Gdje je angle chase koristan? Osim očitog računanja veličina, metoda hvatanja kutova može pomoći dokazati neku paralelnost, pokazati da su neki kutovi zapravo nad istom tetivom, da su neke točke kolinearne ili konciklične itd. Takve stvari je često moguće "vidjeti sa skice", ali teško dokazati, a angle chase može biti dobra metoda za to postići.

Zadaci za samostalni rad

1. Dokažite teorem 1.1.

2. Neka je $\overline{AB}$ promjer kružnice k i neka su P, Q na luku AB. Neka je M presjek pravaca AP i BQ, a N presjek pravaca AQ i BP. Dokažite da je $MN \perp AB$.

3. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokažite da je $\angle BAN = \angle CAO$.

4. U trokutu ABC H, O su redom ortocentar i centar opisane kružnice ABC. Dokažite da je $\angle BAH = \angle CAO$.

5. Neka je ABC trokut, H njegov ortocentar. Dokaži da preslika H preko bilo koje stranice trokuta ABC leži na njemu opisanoj kružnici.

6. Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\angle BCA$ tri puta veći od kuta $\angle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredite kutove danog trokuta.

7. Dvije kružnice sijeku se u točkama P i Q. Ako dva pravca koja prolaze kroz točku Q sijeku prvu kružnicu u točkama A i B, a drugu kružnicu u točkama C i D, dokaži da su trokuti PAB i PCD slični.

8. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°$ i $\sphericalangle ACB = 40°$. Ako je $\sphericalangle DBC = 30° + \sphericalangle BDC$, izračunaj $\sphericalangle BDC$.

9. Jednakokračni trokut ABC, $|AB| = |AC|$, upisan je u kružnicu k Neka je D točka na osnovici $|BC|$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD, i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokažite da vrijedi $|EG| = |GF|$.

10. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku BC odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB. Dokaži da je $|BQ| = |QR|$.

11. U trokutu ABC I je centar upisane kružnice, M je polovište luka BC koji ne sadrži A. Dokaži da je M centar opisane kružnice trokutu BIC.

12. U trokutu ABC kut $\angle CAB = 50°$ i $\angle ABC = 60°$. Na stranici $\overline{AB}$ nalazi se točka D, a na stranici $\overline{BC}$ točka E tako da je $\angle CAE = \angle ACD = 30°$. Izračunajte mjeru kuta $\angle CDE$.

13. Točka N je nožište visine na hipotenuzu AB pravokutnog trokuta ABC. Simetrale kutova $\angle NCA$ i $\angle ABN$ sijeku dužinu AB redom u točkama K i L. Ako su S i T redom središta kružnica upisanih trokutima BCN i NCA, dokaži da je četverokut $KLST$ tetivan.

14. Neka je P točka unutar šiljastog kuta $\angle BAC$. Pretpostavite da je $\angle ABP = \angle ACP = 90°$. Neka su točke D i E redom na stranicama BC i AC takve da je $|BD| = |BP|$ i $|CP| = |CE|$. Točke F i G nalaze se redom na stranicama AC i AB tako da je DF okomit na AB i EG okomit na AC. Dokažite da je $|PF| = |PG|$.

4.2. C2: Martin Vrbovčan - Prebrojavanje

Predavanje Hintovi Rješenja

U ovom predavanju podsjetit ćemo se osnovnih principa prebrojavanja i klasičnih problema gdje se ono koristi, ali i naučiti neke nove korisne alate. Za početak, navedimo izraze i terminologiju koju koristimo u ostatku predavanja:

- $|S|$ = broj elemenata skupa S
- Dva skupa su *ekvipotentna* ako imaju jednak broj elemenata.
- *Particija* skupa S je podjela elemenata tog skupa u $k \geq 1$ skupova $A_1, \ldots, A_k$ tako da se svaki element od S nalazi u točno jednom od skupova A_i.
- $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$; čitamo: n *faktorijela*; posebno, vrijedi $0! = 1$
- *Binomni koeficijent* pojavljuje se kao koeficijent uz x^k u $(1+x)^n$, čitamo "n *povrh* k", a dan je formulom:
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Osnovni principi prebrojavanja

- **Princip sume**
Broj elemenata unije međusobno disjunktnih skupova jednak je sumi broja elemenata skupova.
- **Princip produkta**
Broj elemenata Kartezijevog produkta konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata skupova.
- **Princip kvocijenta**
Particioniramo li skup S na k jednakih skupova od n elemenata vrijedi $k = \frac{|S|}{n}$. Ovo je zapravo samo reformulacija principa produkta, ali dobro je imati ga na umu kao zaseban princip.
- **Princip bijekcije**
Dva su skupa ekvipotentna ako i samo ako postoji bijekcija između njih.
- **Princip dvostrukog brojanja**
Prebrojavanjem skupa na više različitih načina odgovori će biti jednaki.
- **Princip matematičke indukcije**
Neka je $P(n)$ tvrdnja koja ovisi o prirodnom broju n i neka vrijedi:
  1. Tvrdnja je istinita za $n = 1$ (*baza indukcije*).
  2. Uz pretpostavku da je tvrdnja istinita za neki prirodni broj n (*pretpostavka indukcije*) vrijedi da je istinita i za $n + 1$ (*korak indukcije*).

  Tada je tvrdnja istinita za svaki $n \in \mathbb{N}$.
- **Dirichletov princip**
Particioniramo li skup S koji ima više od $k \cdot n$ elemenata u k skupova, tada barem jedan od tih k skupova ima barem n elemenata.

Promotrimo sada neke česte probleme vezane uz prebrojavanja.

Permutacije

Neka je
$$S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$
Pretpostavimo da su elementi skupa S uređeni, dakle za svaki element zna se koji je po redu. Tada je **permutacija** π skupa S uređena n-torka $(\pi(x_1), \pi(x_2), \ldots, \pi(x_n))$, tj. uređena n-torka međusobno različitih elemenata iz S.
k-permutacija skupa S je uređena k-torka međusobno različitih elemenata iz S. Na sličan način možemo definirati i **permutacije s ponavljanjem** i **k-permutacije s ponavljanjem** kao uređene n-torke, odnosno k-torke, elemenata iz S, no ne nužno različitih.

Kombinacije

Neki podskup A skupa S, takav da vrijedi $|A| = k$, zovemo **k-kombinacija** od S. Kod k-kombinacija nije nam bitan poredak elemenata. Broj k-kombinacija od S, za $|S| = n$, jednak je $\binom{n}{k}$ (*provjerite!*).
Budući da skupovi ne mogu sadržavati više jednakih elemenata, kombinacije s ponavljanjem ne možemo definirati analogno permutacijama s ponavljanjem. Umjesto toga, možemo reći da je **k-kombinacija s ponavljanjem** od S multiskup ("skup" koji može sadržavati više jednakih elemenata) koji sadrži ukupno k elemenata iz S.
Na primjer, $A = \{1, 1, 2, 5, 5, 5\}$ je 6-kombinacija s ponavljanjem od $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. A možemo zapisati i kao $\{1^2, 2, 5^3\}$ pri čemu eksponenti označavaju broj istih elemenata u multiskupu.

Formula uključivanja i isključivanja (FUI)

Znamo da je broj elemenata unije dva disjunktna skupa jednak zbroju broja elemenata u svakom od njih. No, što ako želimo broj elemenata unije dva skupa koji nisu disjunktni? Ili više takvih skupova? Promotrimo prvo slučaj sa dva skupa A i B koji nisu disjunktni. Zbrajanjem broja elemenata svakog od njih dobit ćemo prevelik broj jer smo tako elemente presjeka brojali dva puta. Zato vrijedi
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$
Za tri takva skupa A, B i C moramo oduzeti broj elemenata presjeka dva skupa, ali tako smo previše puta oduzeli one koji se nalaze u sva tri skupa, pa ih moramo još jednom pribrojiti. To možemo provjeriti rastavljanjem skupa $A \cup B \cup C$ na međusobno disjunktne podskupove i iskoristiti princip zbroja.
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$
Općenitno, za skupove $A_1, \ldots, A_n \subseteq S$ koji nisu nužno disjunktni vrijedi:
$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$
Odatle slijedi:
$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| \ + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| \ - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

Lakši zadaci

1. Koliko različitih lozinki duljine 4 možemo složiti od znamenki $0, 1, \ldots, 9$ ako se znamenke ne smiju ponavljati i redoslijed je važan?

2. Na koliko načina možemo poredati 7 knjiga na policu ako su među tim knjigama 3 potpuno iste kopije jednog naslova, a preostalih 4 su sve različite?

3. Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ prirodan broj rastavljen na proste faktore, kako glasi opća formula za njegov broj djelitelja?

4. U slastičarnici postoje 4 boje kuglica sladoleda (vanilija, čokolada, jagoda, pistacija) i svaka boja je dostupna u neograničenoj količini. Koliko načina možemo izabrati košaricu od 5 kuglica ako nam je bitan samo izbor boja (redoslijed kuglica nije bitan)?

5. Iz grupe od 12 studenata treba odabrati odbor od 3 člana. Koliko različitih odbora postoji (redoslijed nije bitan)?

6. Na koliko načina možemo raspodijeliti 10 jednakih bombona među 4 djece ako neka djeca mogu dobiti i 0 bombona (redoslijed djece je fiksan)?

7. Na koliko različitih načina može se smjestiti 8 različitih osoba oko okruglog stola ako rotacije smatramo istim (tj. pozicije računamo do rotacije)?

8. Koliko petokartnih ruku iz standardnog špila od 52 karte sadrži barem jednog asa?

9. Koliko permutacija slova A, B, C, D, E zadovoljava da su A i B susjedna ili je C na prvom mjestu?

10. Koliko različitih petokrakih pokera (full house — tri iste + par) postoji u standardnom špilu od 52 karte?

11. Koliko različitih nizova (permutacija) dobivamo raspoređivanjem slova riječi `MISSISSIPPI`?

12. Koliko podskupova skupa $\{1, 2, \dots, 10\}$ nema dvije uzastopne znamenke (tj. ne sadrže par $k, k+1$)?

Umjereni zadaci

13. Koliko nenegativnih rješenja ima jednadžba

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20,$$

pod dodatnim uvjetom da je za svaki i $0 \le x_i \le 6$?

14. Na koliko dijelova n pravaca u općem položaju dijeli ravninu (svaka dva pravca se međusobno sijeku i nijedna tri pravca se ne sijeku u istoj točki)?

15. Neka je $n \ge 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

16. 15 učenika sudjeluje na zimskoj školi. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Zimska škola traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredite k.

17. Dokažite sljedeće identitete kombinatornim argumentima (tj. pronađite dva načina prebrojavanja istog skupa takva da jedno predstavlja lijevu, a drugo desnu stranu jednakosti):

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

(c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

(d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

(e) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$

(f) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n + n^2) \cdot 2^{n-2}$

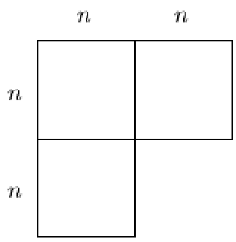
18. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

19. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

20. (*Chu Shih-Chieh*) (Kombinatorno) dokažite da vrijedi

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

21. Neka je n prirodan broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 kvadratića. Koliko je pravokutnika na slici?



Teži zadaci

22. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

23. Na koliko načina se može parkirati 10 vozila na 40 parkirnih mjesta tako da je između svaka dva vozila barem jedno prazno parkirno mjesto?

24. U utrci sudjeluje 200 biciklista. Na početku utrke biciklisti su poredani jedan iza drugoga. Kažemo da neki biciklist pretječe ako mijenja mjesto s biciklistom neposredno ispred sebe. Tijekom utrke poredak se mijenja samo kad neki biciklist pretječe. Neka je A broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao točno jednom, te neka je B broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao najviše jednom. Dokažite da vrijedi

$$2A = B$$

25. Na PMF-u imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocjenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1+\sqrt{4n-3})$.

4.3. A2: David Lang - Faktorizacije

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Zadaci

1. Ako za realne brojeve x, y vrijedi $x - y = 6$ i $x^2 + y^2 = 22$, koliko je $x^3 - y^3$?

2. Usporedite brojeve $\sqrt{2014 \cdot 2016}$ i 2015.

3. Neka su a i b pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3 \quad \text{i} \quad \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} = 10.$$

odredi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

4. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a + b + c = 3 \quad \text{i} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Koliko je $a^2 + b^2 + c^2$?

5. Faktoriziraj izraz $x^4 + x^2 + 1$.

6. Faktoriziraj izraz $a^4 + 4b^4$ (identitet Sophie-Germain).

7. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24$$

pri čemu su a, b i c realni brojevi te odredi za koje a, b, c se ta vrijednost postiže.

8. Neka su m i n prirodni brojevi takvi da vrijedi $m^2 + 3(mn)^2 = 30n^2 + 517$. Odredi vrijednost $3(mn)^2$.

4.4. N2: Ivan Premuš - Prosti brojevi

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Prosti brojevi su fundamentalni objekti u teoriji brojeva, kako u natjecateljskoj matematici tako i u znanosti. Na prvi se pogled čini jednostavno, ali pokazuje se da ima puno zanimljivih pitanja vezanih uz proste brojeve, a na mnogo je iznimno teško dati odgovor. Mi ćemo se fokusirati na zadatke i činjenice o prostim brojevima korisne za natjecanja.

Definicija 4.4.1

Za prirodan broj p kažemo da je **prost** ako ima točno dva različita djelitelja (konkretno 1 i p). U suprotnom, kažemo da je broj složen. Broj 1 nije ni prost ni složen.

Jedan od temeljnih razloga važnosti i koristi prostih brojeva je sljedeći teorem.

Teorem 4.4.2: Osnovni teorem aritmetike

Svaki prirodan broj veći od 1 ima jedinstvenu faktorizaciju na proste brojeve.

Snaga ovog teorema je sto nam omogućuje analizirati sve brojeve pomoću prostih brojeva koji su ipak u nekom smislu jednostavniji, o njima nešto znamo. Primjerice, možemo odrediti ili eliminirati potencijalna rješenje neke cjelobrojne jednadžbe na temelju djeljivosti nekim prostim brojem. Još je jedna korisna činjenica dana u idućem teoremu.

Teorem 4.4.3: Euklidova lema

Neka je p prost broj za koji vrijedi $p \mid ab$. Tada $p \mid a$ ili $p \mid b$.

Jedno pitanje koji bi nas moglo zanimati je koliko ima prostih brojeva? Poznati dokaz dao je još Euklid.

Teorem 4.4.4

Skup prostih brojeva je beskonačan.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je prostih brojeva konačno mnogo. Možemo ih sve ispisati, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Promotrimo broj $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. On ne može biti djeljiv niti jednim p_i, ali po osnovnom teoremu aritmetike ipak mora imati rastav na proste faktore. Kako je prostih brojeva po našoj pretpostavci samo konačno mnogo, neki p_i bi se morao pojaviti u toj faktorizaciji, ali to je kontradikcija. Zaključujemo da je početna pretpostavka neistinita, tj. da prostih brojeva ima beskonačno mnogo. □

Zadaci

1. Nađite sve prirodne brojeve n za koje su brojevi $3n - 4$, $4n - 5$ i $5n - 3$ prosti.

2. Dokažite da za prost broj $p > 3$ vrijedi $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

3. Ako su $8p - 1$ i p prosti, dokažite da je $8p + 1$ složen.

4. Dokažite da udaljenost između susjednih prostih brojeva može biti proizvoljno velika. Drugim riječima, dokažite da za svaki n postoji niz uzastopnih složenih brojeva duljine točno n.

5. Dokažite da za prost $p > 5$ vrijedi $360 \mid p^4 - 5p^2 + 4$.

6. Nađite sve proste brojeve p, q za koje je $p^{2q} + q^{2p}$ isto prost.

7. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $4n + 3$.

8. Odredite sve parove prostih brojeva (p, q) koji zadovoljavaju $p^2 - 2q^2 = 1$.

9. Odredite sve parove prostih brojeva (p, q) takve da vrijedi

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2.$$

10. Odredi sve proste brojeve p takve da su $p + 2$ i $p^2 + 2p - 8$ također prosti brojevi.

11. Odredi sve proste brojeve p za koje je $2^p + p^2$ također prost broj.

12. Odredi sve proste brojeve p, q i r takve da vrijedi $pq = r^2 + r + 1$.

13. Odredi sve parove prirodnih brojeva (x, y) za koje je $\frac{xy^2}{x+y}$ prost broj.

14. Nađite sve proste brojeve p i q takve da je $p^{q-1} + q^{p-1}$ kvadrat prirodnog broja.

15. Riješite u prirodnim brojevima jednadžbu

$$x^{x+y} = y^{y-x}$$

.

16. Neka je k prirodan broj veći od 1. Dokažite da postoji prost broj p i strogo rastući niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ takav da svi članovi niza

$$p + ka_1, p + ka_2, \ldots p + ka_n, \ldots$$

budu prosti brojevi.

17. Dokažite da broj koji se sastoji od točno 2^n istih znamenki sadrži barem n prostih faktora.

18. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je najveći prosti djelitelj broja $n^4 + 1$ veći od $2n$.

19. Neka je $n \geq 2$ pozitivan cijeli broj. Dokažite da se svi djelitelji broja n mogu zapisati kao niz $d_1, \ldots, d_k$ takav da za svaki $1 \leq i < k$ jedan od brojeva $\frac{d_i}{d_{i+1}}$ ili $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ bude prost broj.

4.5. X2: Marija Dora Marodi - Matematička indukcija

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Princip matematičke indukcije moćan je i elegantan alat za dokazivanje tvrdnji T_n koje ovise o n za sve prirodne brojeve $n \in \mathbb{N}$. Kod dokazivanja matematičkom indukcijom uz pretpostavku da željena tvrdnja vrijedi za neki proizvoljan prirodan broj k pokazujemo da tada nužno vrijedi tvrdnja i za $k+1$. Ono što nam nedostaje je provjera da za neki prirodan broj tvrdnja stvarno vrijedi (ne pretpostavljamo, nego izravno dokazujemo da vrijedi).

Definicija 4.5.1: Indukcija

Formalno, matematička indukcija sastavljena je od 3 dijela:

1. **baza** (T_1): pokažemo da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ ili neki drugi "najmanji slučaj".
2. **pretpostavka** (T_k): pretpostavimo da vrijedi tvrdnja za neki $k \in \mathbb{N}$
3. **korak indukcije** (T_{k+1}): koristeći pretpostavku pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$

Indukciju možemo vizualizirati dominama - najprije moramo srušiti prvu dominu u nizu, a zatim znamo da će ona srušiti sljedeću, koja će srušiti sljedeću, koja će srušiti sljedeću... i tako će na kraju srušiti sve domine, tj. tvrdnju ćemo pokazati za sve prirodne brojeve.

⚠ Oprez: Provjera baze

Ne smijemo zaboraviti provjeriti vrijedi li baza indukcije. Beskorisno nam je da svaka domina koja se ruši uzrokuje rušenje sljedeće ako nismo uspjeli srušiti prvu.

Osim na skupu prirodnih brojeva indukciju možemo koristiti na konačnim i prebrojivo beskonačnim skupovima (npr. parni prirodni brojevi, cijeli brojevi, prirodni brojevi veći od 3, prosti brojevi), a to će nekada dovesti i do modifikacije baze i/ili koraka indukcije.

Primjer 1 (Gaussova dosjetka). Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokaži: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Rješenje 1. Tvrdnju ćemo dokazati koristeći matematičku indukciju.

B: Provjeravamo tvrdnju za $n = 1$. Očito je $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ pa smo pokazali bazu indukcije.

P: Pretpostavimo sada da za neki prirodan broj $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + 2 + ... + k = \frac{k \cdot (k+1)}{2}$.

K: Želimo koristeći pretpostavku za k pokazati da je $1 + 2 + \cdots + k + k + 1 = \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2}$

Želimo pokazati da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$. Zato uzimamo pretpostavku i dodajemo joj $k + 1$:

$$\begin{aligned}
1 + 2 + ... + k &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} \qquad \Big/ + (k+1) \\
1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{k \cdot (k+1)}{2} + k + 1 \\
1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{k \cdot (k+1) + 2(k+1)}{2} \\
1 + 2 + ... + k + (k+1) &= \frac{(k+2) \cdot (k+1)}{2}
\end{aligned}$$

Time smo dokazali korak indukcije pa po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n. □

Zadaci za samostalni rad

Lakši zadaci

1. Dokažite da je zbroj prvih n neparnih brojeva jednak n^2.

2. Dokažite da je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva jednaka $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Dokažite da je $n! > 2^n$ za sve $n \geq 4$.

4. Dokažite da je $2^n \geq n^2$ za svaki prirodan broj $n \geq 4$.

5. U ravnini je dano n pravaca od kojih se nikoja tri ne sijeku u istoj točki niti su bilo koja dva paralelna. Dokažite da se pravci sijeku u $\frac{n(n-1)}{2}$ točaka.

Zadaci

6. Dokažite da skup od n elemenata ima $2^n - 1$ nepraznih podskupova.

7. U nekoj skupini ljudi neki su se ljudi međusobno rukovali. Dokažite da je broj ljudi koji su se rukovali s neparnim brojem ljudi paran.

8. Neka je x realan broj takav da je $x + \frac{1}{x}$ cijeli broj. Dokažite da je $x^n + \frac{1}{x^n}$ cijeli broj za svaki prirodni broj n.

9. Na koliko najviše područja n pravaca dijeli ravninu?

Teži zadaci

10. Zadan je niz brojeva $a_1, a_2, a_3, ...$ takav da je $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ te $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ za $n \geq 4$. Dokaži da je $a_n < 2^n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

11. Neka je n prirodan broj. Dokaži da je $2^n \times 2^n$ ploču s jednim uklonjenim poljem moguće popločati trominama u obliku slova L.

12. Dokažite da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 2$ za svaki prirodan broj n.

13. U ravnini je nacrtano n kružnica proizvoljnih polumjera i u proizvoljnom međusobnom položaju. Dokažite da se tako dobivena karta može obojati dvjema bojama tako da se svaka dva susjedna područja obojana različitim bojama.

14. 2048 tenisača sudjelovali su na turniru tako da je svaki od njih igrao protiv svakog od preostalih tenisača. Dokažite da je moguće odabrati njih 12 tako da ih se može poredati u niz na način da je svatko pobijedio sve ljude iza sebe, a izgubio od svih ispred.

15. Promotrimo sve neprazne podskupove od $\{1, 2, ..., n\}$ koji nemaju uzastopnih brojeva. Za svaki od njih pogledamo kvadrat produkta svih njegovih elemenata. Dokažite da je zbroj tih brojeva jednak $(n+1)! - 1$.

5. Zadaci za treću grupu

5.1. G3: Marija Dora Marodi - Fantomiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Fantomiranje je tehnika u geometriji u kojoj se uvodi takozvana **fantomska točka** (ili ponekad pravac ili kružnica) - točka koja nije izričito zadana u početnim uvjetima zadatka, ali se pri rješavanju zadatka uvede kako bi nam dala nešto *ljepše* i *pristupačnije* - kako bi se pojačala ili ostvarila simetrija, mogla primijeniti ili zatvoriti neka poznata konstrukcija ili teorem i slično.

Ta dodatna točka se ne „izmišlja nasumično" nego se bira tako da posjeduje neka posebna svojstva (npr. leži na određenim kružnicama, pravcima ili zadovoljava simetriju) koja nam olakšavaju korištenje poznatih rezultata poput raznih lema, teorema, poznatih konstrukcije, potencije točke ili sličnosti trokuta.

Neformalna ideja: Ako bi neka točka X postojala i imala određena svojstva (npr. na presjeku nečeg - kružnica, pravaca, polovište je i slično), zadatak bi bio trivijalan. Cilj fantomiranja je pogoditi koja je to točka i dokazati da ona uistinu postoji te zadovoljava uvjete.

Napomena

Fantomiranje nije nikakva "magična" tehnika — često ste je već koristili iako možda niste znali da se tako zove. Riječ je o prirodnom geometrijskom razmišljanju: ako bi neka točka postojala, konstrukcija bi bila jasnija i dokaz lakši. Ovdje to samo imenujemo i svjesno primjenjujemo.

Kako koristiti fantomiranje u praksi?

1. Pokušaj iskoristiti svoju geometrijsku intuiciju i iskustvo kako bi vidio što ti nedostaje kako bi riješio/la zadatak. Ako ti se čini da bi konstrukcija bila očita kada bi postojala još jedna točka (npr. simetrična točka, presjek dviju kružnica, refleksija), pokušaj ju definirati.
2. Pretpostavi da točka postoji i prati što se događa. U početku ne moraš dokazivati postojanje, nego koristi „što bi bilo kad bi bilo" da vidiš kamo vodi konstrukcija.
3. Vrati se natrag i opravdaj tu točku.
4. Kada vidiš da fantomska točka rješava problem, moraš dokazati da je ta točka zaista jedinstveno određena ili da zadovoljava uvjete zadatka.

Kada (ne) koristiti fantomiranje?

Fantomiranje je posebno korisno u zadacima gdje:

- Konstrukcija djeluje “nedovršeno” – kao da fali još jedna kružnica, presjek, simetrija.
- Pojavljuju se simetrije koje se mogu pojačati dodatnom konstrukcijom.
- Poznate metode (npr. potencija točke, homotetija) se ne mogu primijeniti bez dodatne točke.

S druge strane, fantomiranje može biti suvišno ili čak kontraproduktivno u zadacima gdje:

- Se zadatak može elegantno riješiti klasičnim metodama kao što su angle chase, length chase, trigonometrija ili inverzija.
- Više “fantomskih” točaka zbunjuje, a ne pojednostavljuje.

Napomena

U zadacima u kojima koristimo fantomsku točku, fantomiranje može riješiti ili cijeli ili dio zadatka.

Oprez

Fantomsku točku ne treba uvoditi samo zato što vam “nedostaje još jedna stvar”. Ako pokušate “fantomirati” u zadatku gdje to nije prirodno, lako možete završiti s konstrukcijom koja ne postoji ili vodi u pogrešan smjer. Uvijek se zapitajte: *“Je li uopće opravdano pretpostaviti da ova točka postoji?”*

Riješeni primjeri

Primjer 1. Dan je trokut ABC. Simetrala kuta $\angle BAC$ i simetrala stranice BC sjeku se u T. dokaži da T leži na opisanoj kružnici ABC.

Dokaz. Ispostavlja se da ne postoji jednostavan način za izravno prikazivanje kuteva s točkom T. Međutim definiramo T' kao sjecište simetrale $\angle BAC$ s opisanim kružnicom. Povučemo okomicu iz T' na BC. Neka je to točka K. Dovoljno je dokazati da je $|BK| = |CK|$. Primjetimo da vrijedi $\angle BAT' = \angle BCT'$ (kutovi nad istom tetivom BT'). Analogno $\angle CAT' = \angle CBT'$. Iz $\angle BAT' = \angle CAT'$ sljedi $\angle CBT' = \angle BCT'$ pa je trokut BCT' jednakokračan iz čega sljedi da K raspolavlja BC i $T = T'$. □

Zadaci za samostalni rad

Zagrijavanje

1. *Leme s ortocentrom*
   a) Dokaži da se ortocentar trokuta centralnosimetrično preko polovišta stranica preslika na opisanu kružnicu.
   b) Dokaži da se ortocentar trokuta osnosimetrično preko stranica preslika na opisanu kružnicu.

2. U trokutu $\triangle ABC$ kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B ($\angle CAB = 2\angle ABC$). Neka simetrala kuta $\angle BCA$ siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi
$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

3. Dan je jednakostranični trokut ABC. Dužina AD siječe stranicu BC u točki E, a pritom je
$$\angle BAD = 20^\circ \quad \text{i} \quad |DE| = |AB|.$$
   Odredi $\angle ADB$.

Zadaci

4. Neka je ABC trokut s opisanom kružnicom Ω i sa središtem te kružnice O . Neka je Γ kružnica koja prolazi kroz točke O i B, te je tangentna na pravac AB u točki B. Neka Γ siječe kružnicu Ω drugi put u točki $P \neq B$. Kružnica koja prolazi kroz točke P i C, te je tangentna na pravac AC u točki C, siječe Γ u točki M. Dokaži da vrijedi:

$$|MP| = |MC|.$$

5. Zadane su stranice AB i AC oštrokutnog trokuta ABC kao tetive u kružnicama k_1 i k_2, redom. Kružnica k_1 siječe stranicu AC u unutarnjoj točki M tako da je $BC = BM$, a kružnica k_2 siječe BC u unutarnjoj točki N tako da je $AB = AN$. Ako se k_1 i k_2 sijeku po drugi put u K, i ako je $\angle ACK = 50°$, odredi $\angle BAC$.

6. Dan je šiljastokutan trokut ABC. Neka je D točka na opisanoj kružnici tog trokuta tako da je AD promjer te kružnice. Pretpostavimo da točke K i L leže redom na dužinama AB i AC, te da su DK i DL tangente na kružnicu opisanu trokutu AKL. Dokaži da pravac KL prolazi kroz ortocentar trokuta ABC.

7. U trokutu $\triangle ABC$ je $\angle CAB = 2\angle ABC$. Točka D nalazi se unutar trokuta $\triangle ABC$, a pritom vrijedi $|AD| = |BD|$ i $|CD| = |AC|$. Dokaži da je $\angle ACB = 3\angle DCB$.

8. Točke P i Q na stranici BC trokuta ABC zadovoljavaju da P leži između B i Q, trokut APQ je oštrokutan i vrijedi:

$$\angle BAP = \angle PAQ = \angle QAC.$$

Neka su B_1, P_1, Q_1, C_1 podnožja okomica iz B, P, Q, C na pravce AP, AQ, AP, AQ, redom. Dokaži da se pravci B_1P_1, C_1Q_1 i BC sijeku u jednoj točki.

Teži zadaci

9. Točka P unutar konveksnog četverokuta $ABCD$ zadovoljava

$$\angle PAD : \angle PBA : \angle DPA = \angle CBP : \angle BAP : \angle BPC = 1 : 2 : 3.$$

Dokaži da su simetrale kutova $\angle ADP$ i $\angle BCP$ te simetrala dužine AB konkuretne.

10. Neka je ABC oštrokutan trokut s ortocentrom H i opisnom kružnicom k. Neka je ω kružnica s promjerom AH, a P točka presjeka ω i k, različita od A. Neka pravci BP i CP presijecaju ω po drugi put u točkama Q i R. Ako je D podnožje visine iz A na BC, a S točka presjeka ω i pravca QD, dokaži da je $HR = HS$.

11. Neka je ω kružnica opisana $\triangle ABC$. Neka su M i N polovišta $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, a T polovište kružnog luka BC od ω koji ne sadrži točku A. Opisane kružnice AMT i ANT sijeku simetrale $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ u X i Y redom, pretpostavimo da su X i Y unutar trokuta ABC. Neka je K sjecište MN i XY. Dokaži $|KA| = |KT|$.

Ako Vam je dosadno :)

12. Četverokut $ABCD$ je opisan oko kružnice k. Sjecište dijagonale AC i kružnice k koje je bliže točki A označimo s E. Neka je točka F dijametralno suprotna točki E na kružnici k. Tangenta na k u točki F siječe prave AB i BC redom u točkama A_1 i C_1 te pravce AD i CD redom u točkama A_2 i C_2. Dokažite $|A_1C_1| = |A_2C_2|$.

5.2. C3: Marko Hrenić - Igre

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Pod pojmom matematičke igre promatrat ćemo situacije u kojima igrači (najčešće 2) igraju neku igru te je cilj odrediti koji igrač, ovisno o zadanim parametrima, ima pobjedničku strategiju.
Kažemo da igrač ima pobjedničku strategiju ako postoji niz poteza kojim može osigurati pobjedu, neovisno o tome kako drugi igrač igra (naravno, ti potezi mogu ovisiti o potezima drugog igrača).

Promotrimo jedan primjer igre.

Primjer 1. Na hrpi se nalazi n kamenčića. Igrači A i B igraju sljedeću igru: u svakom koraku igrač koji je na redu može s hrpe uzeti $1, 2, 3$ ili 4 kamenčića. Prvo igra igrač A, a igraju naizmjenično. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić.
U ovisnosti o n, odredite koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Načelno, ideja rješavanja ovakvih problema je podjela svih pozicija na disjunktne skupove pobjedničkih i gubitničkih pozicija. Pritom su pobjedničke pozicije one na kojima igrač koji je na redu ima pobjedničku strategiju, a gubitničke one na kojima drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

U gornjem primjeru lako možemo zaključiti kako su brojevi $1, 2, 3$ i 4 sigurno pobjedničke pozicije (s njih možemo uzeti sve kamenčiće u jednom potezu). Dakle, kada je $n = 1, 2, 3, 4$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.
Promotrimo situaciju kada imamo 5 kamenčića: sada, koji god broj kamenčića uzmemo, ostat će još $1, 2, 3$ ili 4 kamenčića na hrpi. Kako smo ranije zaključili, drugi igrač sada može uzeti sve kamenčiće i pobijediti. Dakle, 5 je gubitnička pozicija, a u toj poziciji drugi igrač ima pojedničku strategiju.
Promotrimo sada situacije kada imamo $6, 7, 8$ ili 9 kamenčića: prvi igrač može uzeti toliko kamenčića da na hrpi ostane još 5 kamenčića, a tada drugi igrač sigurno gubi (s obzirom da je to gubitnička pozicija), odnosno prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

Sada, generalizacijom i provedbom indukcije, lako vidimo da su (samo) pozicije $n = 5k, k \in \mathbb{N}$ gubitničke, a ostale pobjedničke. Odnosno, prvi igrač ima strategiju za $n \neq 5k$, inače strategiju ima drugi igrač.

Ta strategija je vrlo jednostavna: pobjednik u svakom koraku uzima odgovarajući broj kamenčića kako bi gubitniku ostavio $5k$ kamenčića, odnosno poslao ga u gubitničku poziciju (a ranije smo vidjeli zašto je takva strategija dobra).

Generalizacijom gornjeg dokaza možemo zaključiti i:

- pobjednička pozicija je svaka iz koje postoji potez koji vodi u gubitničku (tj. protivnik je u poziciji iz koje mora izgubiti)
- gubitnička pozicija je svaka iz koje se može doći samo u pobjedničku (tj. protivnik je u poziciji iz koje može pobijediti)

⚠ Oprez 1

Bitno je primijetiti kako pobjednička pozicija garantira pobjedu samo uz točno određeni niz poteza (bilo kakva pogreška igrača vodi u gubitničku poziciju), dok je gubitnička pozicija sigurno gubitnička (naravno, ako protivnik ne pogriješi).

Neki od principa korisnih kod rješavanja ovakvih problema:

- Indukcija - kao u ranijem primjeru
- Invarijante i monovarijante
- Simetrija - situacija u kojoj neki igrač može uvijek na određeni način "odgovoriti" na potez prethodnog

Lakši zadaci

1. Na ploči je napisan prirodan broj n te je zadan prirodan broj k. Dva igrača zatim igraju sljedeću igru: igrač koji je na redu može broju na ploči oduzeti jedan od brojeva $1, 2, ..., k$ (tako da je broj koji ostane na ploči i dalje nenegativan), a igraju naizmenično. Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na ploči ostane broj 0.

Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

2. Kao u prvom zadatku, na ploči je napisan prirodan broj n te je zadan prirodan broj k, međutim dva igrača naizmenično broju s ploče oduzimaju jedan od brojeva $1, 2, 2^2, ..., 2^k$ (tako da je broj koji ostane na ploči i dalje nenegativan). Pobjeđuje igrač nakon čijeg poteza na ploči ostane broj 0.

Koji igrač sada ima pobjedničku strategiju?

3. Vlatka i Vlatko igraju igru s pravokutnom pločom i žetonima oblika kruga međusobno istog radijusa. U potezu je dozvoljeno staviti jedan žeton na ploču tako da se ne preklapa s ostalima te da se nalazi u cijelosti unutar ploče. Igrač koji više ne može postaviti žeton na ploču gubi.

Ako Vlatka igra prva, tko ima pobjedničku strategiju?

4. Na hrpi je n kamenčića ($n \in \mathbb{N}$). Dvojica igrača s hrpe naizmjence uzimaju m kamenčića ($m \geq 1$), a pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić. Za koje n drugi igrač ima pobjedničku strategiju ako m ne smije biti:

a) složen broj b) prost broj?

5. Na stolu su dvije neprazne hrpe kamenčića. Dva igrača naizmjence s jedne od hrpa uzimaju po volji mnogo kamenčića. Pobjeđuje igrač koji uzme zadnji kamenčić.

Za koje rasporede kamenčića na hrpama drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

6. Dva igrača igraju "šah s dva poteza" (tj. šah s normalnim pravilima, osim što svaki igrač igra dva umjesto jednog poteza). Može li neki igrač osigurati neriješen ishod ili pobjedu?

7. Igrači A i B igraju igru sa skakačem na šahovskoj ploči: prvo igrač A postavi skakača na bilo koje polje na ploči, a potom počevši od igrača B igrači naizmjence pomiču skakača na način na koji se skakač miče u šahu. Gubi onaj igrač koji ne može postaviti skakača na polje koje skakač još nije posjetio. Koji igrač ima pobjedničku strategiju?

8. Dva igrača igraju igru s čokoladom koja se sastoji od $m \times n$ kockica, te je broj kockica veći od 1. Igrači naizmjence biraju jednu od preostalih kockica te odlome (i pojedu) sve kockice koje se nalaze u istom redu desno i u istom stupcu dolje u odnosu na odabranu, te i sve one koje su time ostale odvojene od ostatka čokolade (pri čemu gornja lijeva kockica čokolade ostaje nepojedena). Gubi onaj igrač koji pojede zadnju kockicu (tj. onu u gornjem lijevom kutu) jer je to nepristojno.

Za koje veličine čokolada drugi igrač ima pobjedničku strategiju?

9. Dana je bijela kvadratna ploča sa 64 polja. Anica i Božica igraju sljedeću igru: prvo Anica oboji n polja u crvenu boju, a potom Božica odabire 4 retka i 4 stupca te sva polja u njima oboji crno. Božica pobjeđuje ako nije ostalo nijedno crveno polje na ploči; u suprotnom pobjeđuje Anica.

Odredite najmanji n takav da Anica može osigurati pobjedu bez obzira na potez Božice.

Teži zadaci

10. Goci i Lazo igraju igru. Zadan je bilo koji polinom $p(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima, stupnja većeg ili jednakog 1. Na ploči je napisan skup brojeva

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, p, p+1, \ldots, 2p-1, 2p\}$$

i suma S koja je na početku 0. Goci započinje igru. Svaki igrač u svakom potezu odavire jedan broj $n \in \mathcal{M}$, briše ga s ploče i umjesto sume S na ploču napiše $p(n) - S$. Igra je gotova kada se isprazni $\mathcal{M}$. U tom slučaju, ako je S djeljiv s p pobjeđuje Lazo, inače pobjeđuje Goci.

Tko ima pobjedničku strategiju?

11. Na ploči na početku piše n uzastopnih prirodnih brojeva, gdje je n veći od 10. Anica i Božica naizmjence brišu po jedan broj s ploče, dok ne ostanu 2 broja na ploči. Anica pobjeđuje ako su ta 2 broja relativno prosta, a u suprotnom pobjeđuje Božica. Za koje n Anica ima pobjedničku strategiju?

12. Anica i Božica igraju igru. Prvo Božica napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Anica pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki višestrukim ponavljanjem sljedećeg postupka: u jednom koraku ona odabire 2 broja i mijenja svaki od njih njihovim zbrojem. Može li Božica odabrati brojeve tako da Anica ne može ostvariti svoj naum?

13. Anica i Božica igraju igru sa sljedećim pravilima. Na početku postoji hrpa s $n \geq 2$ kamenčića. Prvo Anica makne s hrpe bilo koji broj kamenčića tako da hrpa ne ostane prazna, a zatim njih dvije naizmjence miču kamenčiće s hrpe tako da ako je u prethodnom potezu maknuto k kamenčića, u sljedećem potezu ih smije biti maknuto najviše $2k-1$. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju, ako pobjeđuje ona koja makne zadnji kamenčić?

14. Anica i Božica igraju sljedeću igru, uz dani prirodni broj n. Anica prvo napiše broj 1, a potom naizmjence svaka od njih zapiše broj za 1 veći ili duplo veći od prethodnog, pri čemu nijedan napisani broj ne smije biti veći od n. Pobjeđuje igrač koji napiše broj n. Za koje n Božica ima pobjedničku strategiju?

5.3. A3: Zvonko Andrijević - KAGH i CSB

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod u KAGH

KAGH je pojam koji se odnosi na četiri poznate sredine(kvadratna, aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina). Prije nego što nastavimo, idemo ih definirati.

Definicija 5.3.1: Poznate sredine

- Harmonijska sredina
$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$
- Geometrijska sredina
$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$
- Aritmetička sredina
$$A = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$
- Kvadratna sredina
$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}}$$

Ako su $x_1, x_2, ..., x_n$ **pozitivni** realni brojevi i n je prirodan broj, onda vrijedi ova relacija:

Teorem 5.3.2: Nejednakosti među sredinama

Za pozitivne realne brojeve $x_1, ..., x_n$ vrijedi nejednakost među sredinama:

$$K \geq A \geq G \geq H$$

Dodatno, jednakost vrijedi samo za $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Idemo iskoristiti ovo u jednom primjeru

Primjer 1. Dokažimo da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$$

Kada vrijedi jednakost?
Rješenje: Ovdje ćemo dva puta primijeniti AG-nejednakost:

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{a^4 + b^4}{2} + \frac{b^4 + c^4}{2} + \frac{a^4 + c^4}{2} \geq \sqrt{a^4 b^4} + \sqrt{b^4 c^4} + \sqrt{a^4 c^4} =$$

$$= a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2}{2} + \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2}{2} + \frac{a^2 c^2 + b^2 c^2}{2}$$

$$\geq \sqrt{a^4 b^2 c^2} + \sqrt{a^2 b^4 c^2} + \sqrt{a^2 b^2 c^4} = a^2 bc + ab^2 c + abc^2 = abc(a + b + c)$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $a = b = c$

Malo CSB-a

CSB iliti *Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky* nejednakost je isto jedna vrlo poznata nejednakost koja glasi:

Teorem 5.3.3: Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky (CSB)

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$ realni brojevi. Tada vrijedi

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su n-torke $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ proporcionalne (odnosno postoji realan broj k takav da je $y_i = kx_i, \ \forall i \in \{1, 2, \ldots n\}$).

Vidimo da ova nejednakost vrijedi za **sve** realne brojeve, a ne samo pozitivne!

Ova nejednakost dolazi u još jednom obliku koji se zove *Engel form*:

Korolar 5.3.4: Engel forma CSB nejednakosti

Neka su $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ te $y_1, y_2, \ldots y_n > 0$. Tada vrijedi:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

Ovo možemo i vrlo jednostavno dokazati:

Dokaz. Nejednakost se može zapisati kao

$$(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{y_n}\right) \geq (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

što je direktna posljedica CSB nejednakosti. □

Idemo sad riješiti jedan zadatak pomoću CSB nejednakosti

Primjer 2. Neka su x i y realni brojevi, takvi da je $4x + 5y = 1$. Dokažite da tada vrijedi

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{41}$$

Rješenje:Primijenimo CSB nejednakost

$$(x^2 + y^2)(16 + 25) \geq (4x + 5y)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq \frac{1}{41}$$

Za početak laganini

1. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3.$$

2. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

3. Ako su x, y, z realni brojevi takvi da je $x + y + z = 6$, dokažite da vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 12$$

4. Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z takve da je $x + y + z = 1$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{1}{2}$$

5. Pokažite da za sve pozitivne p i q vrijedi:

$$(p^2 + p + 1)(q^2 + q + 1) \geq 9pq$$

6. Dva trokuta sa stranicama a, b, c i a_1, b_1, c_1 su slični ako i samo ako

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}$$

Umjereni zadatci

7. (**Nesbittova nejednakost**) Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

8. Neka za pozitivne brojeve x, y, z vrijedi $x + y + z = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) \geq 64$$

9. Neka su x, y, z pozitivni brojevi tako da je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, dokažite da e

$$(x-1)(y-1)(z-1) \geq 8$$

10. Neka su a, b, c pozitivni brojevi i $a > b > c$. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

11. Neka je $a, b, c \geq 1$. Pokaži da je $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} < \sqrt{c(ab+1)+1}$

12. Neka su x, y realni brojevi takvi da je $x > y \geq 0$. Dokažite

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3$$

13. Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a i b vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})}$$

Teži zadatci

14. Dokažite nejednakost:$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \leq n^n$.

15. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

16. Dokaži da za bilo koje pozitivne a, b, c i nenegativan p vrijedi nejednakost

$$a^{p+2} + b^{p+2} + c^{p+2} \geq a^p bc + ab^p c + abc^p$$

17. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokažite:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{1}{2}$$

18. Dani su pozitivni realni brojevi a, b, c takvi da je $abc = 1$. Dokaži da vrijedi:

$$\frac{a + c\sqrt{a}}{a^2 b + c + 2} + \frac{b + a\sqrt{b}}{b^2 c + a + 2} + \frac{c + b\sqrt{c}}{c^2 a + b + 2} \leq \frac{1}{2}(a + b + c)$$

5.4. N3: Dario Vuksan - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Promatranje ostatka pri dijeljenju je jedna od temeljnih tehnika rješavanja zadataka iz teorije brojeva i općenito nekih kriptografskih modela. U ovom predavanju ćemo uvesti glavni alat za manipulaciju ostataka pri dijeljenju nekim brojem, kongruencije.

Kratki uvod u kongruencije

Definicija 5.4.1

Kažemo da je $a \in \mathbb{Z}$ kongruentan $b \in \mathbb{Z}$ modulo n ako vrijedi $n \mid a - b$ i pišemo:

$$a \equiv b \mod n$$

Drugim riječima a i b daju isti ostatak pri dijeljenju s n

Zbog činjenice da je kongruencija relacija ekvivalencije često nam se čini da se $\equiv$ ponaša kao jednakost, ali to samo nije istina npr. pri dijeljenju obiju strana kongruencije moramo biti **jako** oprezni.

Teorem 5.4.2: svojstva kongruencija

Za $a, b, c, d, k \in \mathbb{Z}$ Vrijedi:
$a \equiv b \mod n \implies a \equiv kn + b \mod n$
$a \equiv b \mod n,\ c \equiv d \mod n \implies a + c \equiv b + d \mod n$
$a \equiv b \mod n,\ c \equiv d \mod n \implies ac \equiv bd \mod n$
$a \equiv b \mod n \implies a^k \equiv b^k \mod n$
$gcd(c, n) = d,\ a \equiv b \mod n \implies \frac{a}{c} \equiv \frac{b}{c} \mod \frac{n}{d}$

Inverz

Definicija 5.4.3: inverz

Kažemo da je $a^{-1} \in \mathbb{Z}$ inverz od $a \in \mathbb{Z}$ modulo $n \in \mathbb{N}$ ako vrijedi:

$$aa^{-1} = 1 \mod n$$

Nužan uvjet za postojanje inverza je $\gcd(a, n) = 1$ i tada je inverz jedinstven modulo n (to znači da vrijedi $0 < a^{-1} < n$)

Usporedimo to s klasičnim množenjem. Broj 1 je identitet za množenje jer je $x \cdot 1 = x$ za svaki realni x. Kojim brojem moramo pomnožiti x da dobijemo 1? To je kao da ga dijelimo s x, a dijeljenje je inverzna operacija množenju, stoga ga ustvari množimo s $\frac{1}{x}$, a takav razlomak je minus prva potencija od x. Općenito, x^{-1} označava multiplikativni inverz, ali to ne mora uvijek biti $\frac{1}{x}$

Zadaci za upoznavanje s kongruencijama

1. Odredi posljednju znamenku broja 2^{100}.

2. Ako je $x^2 \equiv y^2 \mod p$, vrijedi li nužno $x \equiv y \mod p$?

3. Odredite sve moguće ostatke pri dijeljenju nekog kvadrata s brojevima 3, 4 i 8.

4. a) Dokaži da svaka potencija broja 9 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 8
   b) Dokaži da zbroj znamenki nekog prirodnog broja daje isti ostatak kao i taj broj pri dijeljenju s 3.

5. Dokažite da je svaki prosti broj veći od 3 oblika $6n+1$ ili $6n-1$.

Umjereni zadaci

6. Koliko cjelobrojnih rješenja ima jednadžba $x^2+y^2-8z=15$?

7. Dokaži da 7 dijeli $2^{n+2}+3^{2n+1}$ za svaki prirodan n

8. Pronađi sve proste brojeve p za koje je i $8p^2+1$ prost broj.

9. Pronađi sve proste brojeve p takve da su $2p+1$ i $4p+1$ prosti brojevi.

10. Odredi zadnju znamenku broja 7^{7^7}.

11. Riješi jednadžbu $2^x=3^y-5$ u skupu prirodnih brojeva.

12. Dokaži da 3^n-2 dijeli $(3^n+1)^n-2$ za svaki prirodan n.

13. Koja je posljednja znamenka broja 3^{33}?

14. Dokaži da ne postoji prirodan broj n takav da je $\frac{n(n+1)}{2} \equiv 2 \mod 3$

15. Dokaži da 4 ne dijeli n^2+2n-1 za sve prirodne brojeve n.

16. Je li $2^2+4^4+6^6+\ldots+50^{50}$ kvadrat prirodnog broja?

17. Neka su a,b,c prirodni brojevi takvi da $6 \mid a+b+c$. Dokaži da $6 \mid a^3+b^3+c^3$.

18. Pronađi sve prirodne brojeve n i m takve da je $n^2-7m^2=28$.

19. Dokaži da je $37^{n+2}+16^{n+1}+23^n$ dijeljivo sa 7 za svaki prirodni broj n.

20. Ako je $ab+1$ djeljivo s $b+2$, dokaži da je $2a>b$

21. Postoje li prirodni brojevi a,b takvi da je $3^a-2^b=2021$?

22. Nađi sve proste brojeve p,q takve da je $p^{2q}+q^{2p}$ prost broj.

23. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je 6^m+2^n+2 kvadrat nekog prirodnog broja.

24. Odredi sve parove (a,b) prirodnih brojeva za koje vrijedi $a^b-b^a+2^a=17a^4-2b^2+52$.

Teži zadaci

25. Odredi sve parove (n,k) prirodnih brojeva za koje vrijedi $3^n=5k^2+1$.

26. Odredi sve prirodne brojeve m i n za koje je $2^n+5\cdot 3^m$ kvadrat prirodnog broja.

27. Postoji li prirodni broj n takav da je 8^n+47 prost broj?

28. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je 3^m+3^n+1 kvadrat prirodnog broja.

29. Neka je n prirodan broj takav da $24 \mid n+1$. Dokaži da n ima paran broj djelitelja i da je njihov zbroj djeljiv s 24.

30. Izračunaj sumu:

$$\left\lfloor \frac{2^0}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2^2}{3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{2^{1000}}{3} \right\rfloor$$

$\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj manji ili jednak x.

Izazov

Pokušaj smisliti pravilo po kojem je moguće brzo provjeriti je li neki broj djeljiv s 11. Ako već znaš to pravilo, obrazloži zašto radi.

5.5. X3: Zvonko Andrijević - Invarijante i monovarijante

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Što su invarijante i monovarijante?

Definicija 5.5.1: Invarijanta

Invarijanta je ono što se ne mijenja nakon nekakve transformacije. To može biti neki broj, nekakvo stanje, ostatak pri dijeljenju s nekim brojem i još mnoge druge stvari...

Možda će biti jasnije nakon jednog primjera.

Primjer 1. Neka je na stolu 50 novčića od kojih je jedan pismo, a ostali glava. U jednom potezu možemo preokrenuti bilo koja dva novčića. Jeli moguće da ikad imamo sve novčiće okrenute na stranu glave?
Rješenje: **NIJE** moguće da u ijednom trenutku su svi novčići okrenuti na strani glave. Razlog ovomu jest parnost. Naime ako okrenemo dva novčića koja su prvotno bila na strani glave ili dva koja su prvotno bila na strani pisma, broj onih koji su bili na strani pisma će se povećat ili smanjiti za dva, tj. neće mu se promijeniti parnost. Ako okrenemo jedan koji je bio na strani pisma, a jedan koji je bio na strani glave, broj pisama se neće promijeniti. Znači, broj pisama će uvijek ostati **neparan**, to je **invarijanta**. Zato ono što je traženo u zadatku nije moguće!

Definicija 5.5.2: Monovarijanta

Monovarijanta je veličina koja se stalno povećava ili se stalno smanjuje.

Ajmo i za ovo vidjeti jedan primjer.

Primjer 2. Mentori su raspravljali jeli bolji ljetni kamp ili matematička konferencija. U toj dugotrajnoj raspravi je postalo malo kaotično što je uzrokovalo razdor među mentorima. Tako sada svaki mentor ima najviše 3 mentora koji su mu neprijatelji. Mentor Matej je, kako bi smirio ovaj nered, izjavio da je moguće mentore podijeliti u dvije skupine tako da svaki mentor ima najviše 1 neprijatelja koji je u istoj skupini kao i on. Jeli Matej u pravu?
Rješenje: Matej **JE** u pravu.Raspodijelimo mentore nasumično u dvije grupe. Neka je A broj nezadovoljnih mentora (oni koji su zajedno s dva ili više neprijatelja u skupu). Zatim svakog mentora koji se nalazi u grupi s 2 ili više neprijatelja prebacimo u drugu grupu. Primijetimo kako tim potezom možemo uznemiriti maksimalno jednog mentora iz drugog skupa, što znači da se broj A monotono smanjuje. A je stoga monovarijanta i on će se smanjiti sve dok svi mentori nisu zadovoljni.

Evo nekih invarijanti koje se često koriste:

- **sume i produkti** Sume i produkti su najčešće prva invarijanta koju ljudi provjeravaju jer mogu biti elegantne.Ovo uključuje npr. i sume kvadrata ili umnožak sljedbenika svakog broja
- **ostatci pri dijeljenju s nekim brojem** Ostatci često znaju biti invarijanta i vrijedi ih provjeriti. Primijetite da ovdje brojimo i parnost brojeva kao invarijantu.
- $\frac{x_n}{y_n}$, $x_n - y_n$ Kada su nam zadani nizovi isplati se provjeriti kako se ove veličine mijenjaju.
- **Najveći zajednički djelitelj** Ovo je malo teže za uočiti, ali se isto nerijetko pojavljuje. Potrebno je znati Euklidov algoritam.
- **Udaljenost od ishodišta** Kada nam je zadan skup brojeva, može biti korisno promatrati ih kao točke koordinatnog sustava i provjeriti jeli udaljenost od ishodišta invarijanta.

Zadaci za 7 ujutro

1. Na drvetu je 1000 zlatnih jabuka. Svake noći zmaj pojede dvije jabuke. Postoji li dan kada će na drvetu biti točno 5 jabuka?

2. Može li se šahovska ploča 8×8 kojoj nedostaju gornji desni i donji lijevi kut pokriti pločicama 2×1?

3. Učitelj je na ploči napisao brojeve a, b, c i prozvao Peru da obriše te brojeve i pretvori ih u : $2a - b, 2b - c, 2c - a$. Učitelj je rekao Peri da može dobit peticu ako iz početnih brojeva 2,3,4 dođe nakon konačno mnogo transformacija do brojeva -2,1,8. Hoće li Pero dobiti peticu ?

4. Dario igra sljedeću igru: pokušava pretvoriti uređeni par $(3, 6)$ u $(\frac{5}{12}, \frac{5}{9})$ koristeći transformacije $(a, b) \to (\frac{4}{3}a + \frac{1}{6}b, -\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b)$ i $(a, b) \to (b, a)$. Može li to učiniti?

5. U nekoj igri su uz vrhove šesterokuta $ABCDEF$ redom upisani brojevi 1, 0, 1, 0, 0, 0. Prema pravilima, u svakom koraku Luka može odabrati dva susjedna vrha i uvećati njihove brojeve za jedan. Za pobjedu Luka bi trebao postići da u svih šest vrhova budu jednaki brojevi. Može li Luka pobijediti?

6. Zmaj ima 2010 glava. Vitez može jednim udarcem mača odsjeći 2, 17, 21 ili 33 glave, ali odmah nakon toga zmaju redom izraste novih 9, 10, 0 ili 47 glava. Može li zmaj ostati bez ijedne glave

7. Na nekom je otoku 13 bijelih, 15 zelenih i 17 crvenih kameleona. Kad se dva kameleona različitih boja dotaknu njihova se boja promjenu u treću, preostalu boju. Mogu li nakon niza promjena svi kameleoni postati bijeli?

Za one koji su već budni i spremni

8. Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona; 25 žetona dolje lijevo i 25 gore desno. Žeton se premješta tako da preskoči susjedni žeton i stane na prazno polje iza njega. Je li moguće premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče?

9. Neka je $a_1, .., a_n$ permutacija brojeva $1, .., n$. Ako je n neparan prirodan broj pokaži da je umnožak $P = (a_1 - 1)...(a_n - n)$ paran.

10. *Lema o rukovanju* Na matematičkom partiju je n osoba koje se tijekom večeri međusobno rukuju. Pokaži da je broj osoba koji se rukovao s neparno mnogo ljudi u svakom trenutku paran.

11. Na ploči 15×15 nalazi se 15 topova koji se međusobno ne napadaju. U tom momentu svaki top napravi potez kao skakač u šahu. Pokaži da će se nakon toga barem dva topa međusobno napadati.

12. U ravnini je dano n crvenih i n plavih točaka, tako da nikoje tri nisu kolinearne. Dokaži da možemo nacrtati n dužina od kojih svaka spaja jednu crvenu i jednu plavu točku (svaka točka je rubna za jednu dužinu) koje se ne presijecaju.

13. 10×10 pravokutna parcela zemljišta podijeljena na 100 jediničnih parcela. Devet je jediničnih parcela zaraslo u korov. Ukoliko neka jedinična parcela ima barem dvije susjedne koje su zarasle u korov, onda i ona zaraste u korov. Može li se dogoditi da cijela parcela zaraste u korov?

14. Na kartici su zapisana dva broja $(19, 94)$. Ana, Iva i Dora mogu promijeniti brojeve na kartici prema sljedećem pravilu: Ana mijenja brojeve (a, b) u $(a - b, b)$, Iva u$(a + b, b)$, Dora mijenja brojeve u (b, a). Svaki put kad djevojka dobije karticu napravit će svoju operaciju zamjene najmanje jednom (ili možda i više puta) prije nego dade svoju karticu drugoj djevojci da napravi njezinu zamjenu (možda i više puta). Jeli moguće dobiti nakon transformacija na kartici brojeve: $a)(19, 95)$ ili $b)(19, 96)$?

15. Svaki broj od 1 do 10^6 zamijenimo ćemo zbrojem njihovih znamenki dok ne dođemo do 10^6 jednoznamenkastih brojeva(npr. $99 \rightarrow 9+9=18 \rightarrow 1+8=9$).Hoće li među tih milijun jednoznamenkastih brojeva biti više jedinica ili dvojki?

16. Na školskoj ploči napisano je n brojeva: $x_1, ..., x_n$. U svakom koraku Jurica briše brojeve a i b i zamjenjuje ih brojem $ab + a + b$. Na kraju na ploči ostaje jedan broj. Dokaži da on ne ovisi o redoslijedu brisanja brojeva i ustanovi čemu je jednak u ovisnosti o $x_1, ..., x_n$.

Opaki zadatci za kraj kampa

17. Nađi dva različita rješenja ove jednadžbe: $(x^2 - 3x + 3)^2 - 3(x^2 - 3x + 3) + 3 = x$

18. Na ploči su zapisani neki cijeli brojevi. U svakom koraku odabiremo brojeve a i b koji se nalaze na ploči, obrišemo ih i umjesto njih zapišemo brojeve $3a - b$ i $13a - 3b$. Ako su na početku na ploči brojevi $1, 2, 3, 4, ..., 2011, 2012$, mogu li se nakon konačnog broja koraka na ploči nalaziti brojevi $2, 4, 6, 8, ..., 4022, 4024$?

19. Na ploču je napisano n jedinica. Potezom uzimamo 2 broja a, b i mijenjamo ih s $\frac{a+b}{4}$. Dokažite da nakon $n - 1$ poteza preostali broj neće biti veći od $\frac{1}{n}$.

20. Tom i Jerry igraju sljedeću igru: najprije Jerry napiše 9 prirodnih brojeva na ploču, a onda Tom pokušava dobiti da svi brojevi budu jednaki, višestrukim ponavljanjem sljedeće operacije - u jednom koraku on odabire dva broja i zamjenjuje svaki od njih njihovim zbrojem. Može li Jerry odabrati takve brojeve da Tom ne može ostvariti svoj naum ili Tom može ostvariti svoj naum, bez obzira koje brojeve Jerry odabere?

21. $2n$ veleposlanika pozvano je na banket. Svaki veleposlanik ima najviše $n - 1$ neprijatelja. Dokaži da se veleposlanici mogu razmjestiti oko okruglog stola tako da nitko ne sjedi pored svog neprijatelja.

22. Neka je $a \odot b = \frac{a^2+b^2}{ab}$.Pretpostavi da su $a, b, ..., z$ non-zero cijeli brojevi. Pokaži da ako je

$$a \odot b \odot c ... \odot z$$

cijeli broj, onda je jednak 2

23. Na beskonačnoj "šahovskoj"(zvuči bolje nego "Ploča za Dame") ploči postoji kvadratni odsječak dimenzija $n \times n$ koji je ispunjen žetonima. Potez se sastoji od preskakivanja žetona u vertikalnom ili horizontalnom smjeru preko nekog drugog žetona tako da onaj žeton koji "skače" sleti na polje odmah pokraj drugog žetona. Nakon preskakivanja žeton koji je mirovao se sklanja s ploče. Odredite sve vrijednosti n za koje igra završava s jednim žetonom.

24. Svakom vrhu peterokuta pridružujemo broj x_i gdje $\sum_1^5 x_i > 0$. Ako su x, y, z vrhovi peterokuta redom i ako je $y < 0$ onda mijenjamo (x, y, z) sa $(x + y, -y, z + y)$. Hoće li se ovaj algoritam uvijek zaustaviti?

6. Zadaci za četvrtu grupu

6.1. G4: Marko Hrenić - Trig smash

Predavanje Hintovi Rješenja

Šalabahter

U trokutu $\triangle ABC$ stranice ćemo označavati s a, b, c, a kuteve s α, β, γ na standardan način. Polumjer kružnice opisane trokutu označavat ćemo sa R, a upisane r.

Teorem 6.1.1: Osnovni identitet

Za svaki realan broj x vrijedi
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Teorem 6.1.2: Adicijske formule

Za svaki $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Korolar 6.1.3

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

Teorem 6.1.4: Sinusov poučak

Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Teorem 6.1.5: Kosinusov poučak

Za trokut $\triangle ABC$ vrijedi
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Teorem 6.1.6: Poučak o simetrali kuta

Neka je D presjek simetrale unutarnjeg kuta kod vrha A i stranice BC. Vrijedi:

$$\frac{BD}{c} = \frac{DC}{b}.$$

Teorem 6.1.7: Cevin poučak

Neka su D, E, F točke na pravcima BC, CA, AB redom. Tada vrijedi:

$$AD, BE, CF \text{ se sijeku u jednoj točki} \iff \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Korolar 6.1.8: Trigonometrijski Cevin poučak

$$AD, BE, CF \text{ se sijeku u jednoj točki} \iff \frac{\sin\angle ABE}{\sin\angle EBC} \cdot \frac{\sin\angle BCF}{\sin\angle FCA} \cdot \frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle DAB} = 1.$$

Teorem 6.1.9: Potencija točke

Neka točkom T prolazi pravac p koji siječe kružnicu k u A i B, pravac q koji siječe k u C i D. Vrijedi:

$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$

Primjer 1. Neka je H ortocentar trokuta ABC i D nožište visine iz A na BC. Izračunajte $|AD|$, $|BD|$, $|DC|$ i $|AH|$ (preko duljina stranica trokuta i sinusa i kosinusa kuteva).

Zadaci

1. Neka je AM težišnica trokuta ABC. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle MAC} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}.$$

2. U trokutu ABC ($|AB| > |AC|$) simetrala vanjskog kuta $\angle BAC$ siječe opisanu kružnicu trokuta u točki E, a F je nožište okomice iz E na AB. Dokažite da vrijedi $2|AF| = |AB| - |AC|$.

3. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut kojemu je AC promjer opisane kružnice. Neka je P projekcija točke A na BD te neka je Q projekcija od C na BD. Dokažite da je $|BP| = |DQ|$.

4. Odredi sve parove realnih brojeva $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ za koje vrijedi:

$$\frac{2\sin^2 x + 2}{\sin x + 1} = 3 + \cos(x + y)$$

5. U trokutu ABC vrijedi: $|BC| = 4$, $|CA| = 5$, $\angle BCA = 2\angle CAB$. Izračunaj polumjere tom trokutu opisane i upisane kružnice.

6. Nad stranicama trokuta ABC površine P nalaze se rombovi $ABED, BCGF, iCAIH$ tako da je $\angle ABE = \angle BAC, \angle BCG = \angle CBA, \angle CAI = \angle ACB$. Dokaži da je zbroj površina triju rombova veći ili jednak $6P$. Dokaži da se jednakost postiže ako i samo ako je trokut ABC jednakostraničan.

7. U trokutu ABC vrijedi $|BC| + |AC| = 2|AB|$ i $\angle BAC - \angle CBA = 90°$. Odredi kosinus kuta $\angle ACB$.

8. Neka je trokut ABC takav da vrijedi $|AB| = |AC|$ i $\angle CAB = 90°$. Ako su M i N točke na hipotenuzi BC takve da je $|BM|^2 + |CN|^2 = |MN|^2$, odrediti $\angle MAN$.

9. U trokutu ABC simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu AB u točki D. Neka su a i b redom duljine stranica BC i AC. Ako vrijedi $|CD| = \frac{ab}{a+b}$, odredi $\angle ACB$

10. Točka M se nalazi u trokutu ABC tako da je $\angle MAB = 10°, \angle MBA = 20°, \angle MAC = 40°, \angle MCA = 30°$. Dokaži da je trokut ABC jednakokračan.

11. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje stranice AB, BC, CA u F, D, E redom. Sjecište ID i EF je K. Dokaži da su A, K, M kolinearne, gdje je M polovište BC.

12. U trokutu ABC, kut u vrhu C je tupi, a točka D je nožište visine iz vrha C. Točke P i Q nalaze se na dužini AB i vrijedi $\angle PCB = \angle ACQ = 90°$. Dokaži da je

$$|AP| * |DQ| = |PD| * |QB|$$

13. Neka je ABC trokut sa stranicama duljina a, b, c i neka je P točka u njegovoj unutrašnjosti. Neka pravac AP ponovno siječe kružnicu opisanu trokutu BCP u točki A' i neka su B' i C' točke definirane analogno. Dokaži da za opseg O šesterokuta $AB'CA'BC'$ vrijedi

$$O >= 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$$

14. Neka je $ABCD$ tetivan četverokut takav da je $|AB| = |AD|$. Točke M i N nalaze se redom na stranicama BC i CD i pritom je $|BM| + |DN| = |MN|$. Dokaži da središte opisane kružnice trokuta AMN pripada pravcu $|AC|$.

15. Dan je šiljastokutni trokut ABC s visinama $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ te ortocentrom H. Dužine $\overline{EF}$ i $\overline{AD}$ sijeku se u točki G. Dužina $\overline{AK}$ je promjer kružnice opisane trokutu ABC i siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki M. Dokaži da su pravci GM i HK paralelni.

16. Neka je H ortocentar šiljastokutnog trokuta ABC. Kružnica Γ_A sa središtem u polovištu stranice BC koja prolazi kroz H siječe pravac BC u točkama A_1 i A_2. Točke B_1, B_2, C_1 i C_2 su definirane na sličan način. Dokaži da su točke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 konciklične.

17. Neka je ABC šiljastokutan trokut takav da vrijedi $|AB| < |AC|$. Neka su X i Y točke na manjem luku $\overset{\frown}{BC}$ kružnice opisane trokutu ABC takve da je $|BX| = |XY| = |YC|$. Pretpostavimo da na dužini $\overline{AY}$ postoji točka N takva da je $|AB| = |AN| = |NC|$. Dokaži da pravac NC prolazi kroz polovište dužine $\overline{AX}$.

18. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut u kojem vrijedi $|AB| = |BC| = |CD|, |AC|! = |BD|$, i neka je E sjecište njegovih dijagonala. Dokaži da je $|AE| = |DE|$ ako i samo ako $|\angle BAD + \angle ADC = 120°$.

6.2. C4: Simeon Stefanović - Nesigurna prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

U ovom predavanju prisjetit ćemo se osnovnih principa prebrojavanja i dvostrukih prebrojavanja. Mnogi zadaci iz područja kombinatorike koriste upravo metode prebrojavanja kao glavnu ideju, a dvostruko prebrojavanje često se može iskoristiti za dokazivanje jednakosti nekih izraza ili za dokazivanje da neka konstrukcija ne postoji.Neki od osnovnih principa prebrojavanja su:

1. Princip zbroja - broj elemenata unije dva disjunktna konačna skupa je suma brojeva elemenata tih skupova - ako imamo x crvenih majica i y plavih majica, ukupno imamo $x + y$ majica
2. Princip umnoška - broj elemenata Kartezijevog umnoška konačnih skupova jednak je umnošku broja elemenata tih skupova - ako na raspolaganju imamo x hlača i y majica, tada se možemo odjenuti na $x \cdot y$ načina
3. Princip bijekcije - dva skupa su ekvipotentna (imaju jednak broj elemenata) ako i samo ako postoji bijekcija između njih
4. Matematička indukcija

Kod rješavanja zadataka s prebrojavanjem, korisno se zapitati sljedeće:

1. Što želim prebrojati?
2. Koja svojstva ima to što želim prebrojati?
3. Mogu li prebrojati sve osim onoga što želim prebrojati (komplement)?
4. Mogu li riješiti zadatak za male primjere "na prste"?

Binomni koeficijenti

Definicija 6.2.1

Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi, $n \geq k$.
Definiramo $\binom{n}{k}$ (i čitamo n *povrh* k) kao broj načina za odabrati k-člani podskup iz n-članog skupa.

Primijetite kako poredak izabranih elemenata ovdje nije bitan.

Vrijedi:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

za n, k nenegativne cijele brojeve, $n \geq k$.

Na primjer, ako od 10 učenika biramo 3 učenika koja će biti u istoj grupi, to možemo napraviti na $\binom{10}{3}$ načina.

Formula uključivanja - isključivanja (FUI)

Ukoliko želimo odrediti broj elemenata više skupova koja nisu nužno disjunktna, korisno je tu situaciju vizualizirati pomoću Vennovih dijagrama. Za dva skupa lako se zaključuje i dokazuje da je:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Isto se može primijeniti i za bilo koji broj skupova (*kako?*).

Dvostruko prebrojavanje

Osnovna ideja dvostrukog prebrojavanja je prebrojati broj elemenata istog skupa na dva različita načina. S obzirom da se radi o istom skupu, dobiveni rezultat mora biti jednak neovisno o načinu brojanja, pod pretpostavkom da smo ispravno brojali.

Primjer 1. Zbrajamo li brojeve u tablici, dobit ćemo isti rezultat zbrojimo li prvo brojeve po svim retcima te zatim zbrojimo dobivene sume, kao i ako prvo zbrojimo brojeve po stupcima.

Tako, primjerice, možemo dokazati jednakost neka dva izraza ili dokazati da neka konstrukcija nije moguća (u slučaju kada jednakost koju dobijemo prebrojavanjem na dva različita načina ne vrijedi - riječ je zapravo o metodi dokazivanja kontradikcijom).

Primjer 2. Petnaest učenika pohađa ljetni tečaj. Svaki dan, troje učenika ostaje nakon škole dežurati i očistiti učionicu. Nakon završetka tečaja ustanovljeno je da je svaki par učenika bio zajedno na dežurstvu točno jednom. Koliko je dana trajao tečaj?
Rješenje. Neka je odgovor k. Prebrojimo ukupan broj parova učenika koji su bili zajedno na dežurstvu tijekom k dana. Budući da je svaki par učenika bio zajedno točno jednom, taj broj jednak je $15*14/2 = 105$. S druge strane, budući da su svaki dan dežurala 3 učenika, broj parova po danu jednak je $3 * 2/2 = 3$, pa je ukupan broj parova jednak $3k$. Dakle,
$3k = 105 \quad \Rightarrow \quad k = 35.$

Primjer 3. Neka $p_n(k)$ označava broj permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, gdje je $n \geq 1$, koje imaju točno k fiksnih točaka. Dokažite da vrijedi
$$\sum_{k=0}^{n} k\, p_n(k) = n!.$$
Rješenje. Primijetimo da lijeva strana jednakosti predstavlja ukupan broj fiksnih točaka u svim permutacijama skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Kako bismo pokazali da je taj broj jednak $n!$, primijetimo da postoji $(n-1)!$ permutacija koje fiksiraju element 1, $(n-1)!$ permutacija koje fiksiraju element 2, i tako redom, sve do $(n-1)!$ permutacija koje fiksiraju element n.
Slijedi da je ukupan broj fiksnih točaka u svim permutacijama jednak
$$n \cdot (n-1)! = n!.$$

Lakši zadaci

1. Na koliko je načina moguće složiti sendvič, ako su na raspolaganju 3 vrste peciva, 5 vrsta šunke i 4 vrste sira? Sendvič ima jedno pecivo, a može imati jednu vrstu šunke i/ili jednu vrstu sira, ali ne mora imati ni jedno od toga.
2. Na koliko se načina može 8 topova postaviti na šahovsku ploču tako da se međusobno ne napadaju?
3. Na koliko načina možemo izabrati osobu koja će osvojiti kekse i dvije osobe koje će osvojiti sok među 15 osoba? Ista osoba može osvojiti i kekse i sok.
4. Koliko ima brojeva manjih od 1000 koji su djeljivi sa 3 ili sa 7?
5. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5?
6. U nekom društvu trećina svih penzionera su šahisti, a četvrtina svih šahista su penzioneri. Ima li u tom društvu više šahista ili penzionera?
7. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Ploči dimenzija $n \times n$ odstranjena su dva nasuprotna kutna polja. Na koliko načina je na tu ploču moguće postaviti n figura tako da nikoje dvije ne budu u istom retku ili stupcu?

8. 15 učenika sudjeluje na zimskoj školi. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon predavanja. Zimska škola traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredite k.

9. Dokažite sljedeće identitete kombinatornim argumentima (tj. pronađite dva načina prebrojavanja istog skupa takva da jedno predstavlja lijevu, a drugo desnu stranu jednakosti):

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
(c) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$
(d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
(e) $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = (n + n^2) \cdot 2^{n-2}$

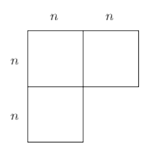
10. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva.

11. Udruga kušača vina "Umjereni vinoljupci" ocjenjuje kvalitetu ukupno n vrsta vina tako da u kušanju sudjeluje točno n kušača i da svaku vrstu vina proba točno 4 kušača. Koliki je najmanji n ako je uvjet da ne postoji par vina kojeg je kušao par istih kušača?

12. (*Chu Shih-Chieh*) (Kombinatorno) dokažite da vrijedi

$$\sum_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

13. Neka je n prirodan broj. Tri kvadrata stranice duljine n spojena su kao na slici. Zatim je svaki od njih podijeljen na n^2 kvadratića. Koliko je pravokutnika na slici?



Teži zadaci

14. Na natjecanju u kuhanju 8 sudaca ocjenjuje natjecatelje s *prošao* ili *pao*. Poznato je da, za svaka dva natjecatelja, dva sudca su obojicu ocjenila s *prošao*, dva sudca prvog s *prošao*, a drugog s *pao*, dva sudca drugog s *prošao*, a prvog s *pao*, a dva sudca obojicu s *pao*. Koliki je najveći mogući broj natjecatelja?

15. Na koliko načina se može parkirati 10 vozila na 40 parkirnih mjesta tako da je između svaka dva vozila barem jedno prazno parkirno mjesto?

16. Dana je kvadratna ploča s $n \times n$ polja, gdje je n neparan prirodni broj. Svaki od $2n(n+1)$ jediničnih bridova koji omeđuju polja te ploče je ili crvene ili plave boje. Poznato je da je najviše n^2 bridova crvene boje.

Dokaži da postoji polje te ploče čija su barem tri brida plave boje.

17. U utrci sudjeluje 200 biciklista. Na početku utrke biciklisti su poredani jedan iza drugoga. Kažemo da neki biciklist pretječe ako mijenja mjesto s biciklistom neposredno ispred sebe. Tijekom utrke poredak se mijenja samo kad neki biciklist pretječe. Neka je A broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao točno jednom, te neka je B broj svih mogućih poredaka na kraju utrke u kojoj je svaki biciklist pretjecao najviše jednom. Dokažite da vrijedi $2A = B$

18. Na PMF-u imamo n profesora i n studenata. Svaki profesor ocjenjuje svakog studenta s *prošao* ili s *pao*. Poznato je da ne postoji par studenata za koje postoji par profesora koji ih je jednako ocijenio. Dokaži da je ukupni broj ocjena *prošao* najviše $\frac{n}{2}(1 + \sqrt{4n-3})$.

6.3. A4: Dario Vuksan - Teleskopiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Teleskopiranje u matematici je standardan trik koji se ponekad primjenjuje na natjecanjima i korisno ga je poznavati, premda se ne uči na redovnoj nastavi. Općenito, teleskopirajući niz je suma ili produkt članova takvog niza u kojem se većina članova poništi (ili pokrati), pa ostane samo nekoliko članova koje je lagano izračunati.
Za teleskopirajuću sumu, ideja je izraziti općeniti član kao razliku dva uzastopna člana nekog niza. Ako je tražena suma $a_1+a_2+\ldots+a_n$, teleskopiranje provodimo tako da svaki a_i zapišemo kao b_i-b_{i-1} tako da se gotovo svi članovi sume ponište. Traženu sumu možemo formalnije zapisati pomoću simbola za sumu Σ (grčko slovo sigma):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n}(b_i - b_{i-1})$$

a raspisivanjem svakog a_i dobijemo

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_{n-1} - b_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})$$

što je jednako $b_n - b_0$. U većini zadataka, b_n i b_0 su neke poznate vrijednosti koje je jednostavno oduzeti. Ovakav postupak može se primijeniti i za $n \to \infty$ (beskonačne sume), ali u ovom predavanju fokusirat ćemo se samo na konačne n.

Primjer 1. Izvod formule za zbroj prvih n prirodnih brojeva iz relacije $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$

Rješenje 1. Zbrajanjem zadane relacije za $k = 1, 2, \ldots, n$ dobijemo:

$$\left(2^2 - 1^2\right) + \left(3^2 - 2^2\right) + \ldots + \left((n+1)^2 - n^2\right) = 2(1 + 2 + \ldots + n) + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ jedinica}}$$

Označimo sa S_n sumu prvih n prirodnih brojeva. Sređivanjem gornje jednakosti slijedi:

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2S_n + n$$

pa je jednostavno

$$S_n = \frac{(n+1)^2 - n - 1}{2}$$

To, naravno, možemo zapisati u poznatijem obliku:

$$S_n = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)\left((n+1) - 1\right)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Slično sumama, teleskopirajući produkt je taj u kojem se svaki faktor može zapisati kao razlomak u kojemu su brojnik i nazivnik uzastopni članovi nekog niza, pa se većina faktora pokrati. Na primjer, ako zapišemo svaki član produkta $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ kao $a_i = \frac{b_i}{b_{i-1}}$ tada se nazivnik svakog člana pokrati s brojnikom prethodnog i preostanu nazivnik prvog člana i brojnik posljednjeg. Kao i kod suma, produkte možemo zapisati pomoću simbola Π (veliko pi):

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} \frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{b_1}{b_0} \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \ldots \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n}{b_0}$$

Uočite da smo mogli umjesto $a_k = \frac{b_k}{b_{k-1}}$ pisati $a_k = \frac{b_k}{b_{k+1}}$, tada bi produkt bio jednak $\frac{b_1}{b_{n+1}}$.

Primjer 2. Pojednostavni produkt:

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$$

Rješenje 2. Promotrimo općeniti član i zapišimo ga kao jedan razlomak:

$$a_k=1-\frac{2}{k(k+1)}=\frac{k(k+1)-2}{k(k+1)}=\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}$$

U brojniku uočimo faktorizaciju:

$$k^2+k-2=k^2+(2k-k)-2=k(k+2)-(k+2)=(k-1)(k+2)$$

te dalje sredimo razlomak:

$$\frac{k^2+k-2}{k(k+1)}=\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\frac{\frac{k-1}{k+1}}{\frac{k}{k+2}}$$

Ovaj zadnji razlomak dobili smo kraćenjem s $(k+1)(k+2)$.

Koristeći oznake kao u uvodu, imamo $b_k=\frac{k-1}{k+1}$ i preko njega možemo izraziti $a_k=\frac{b_k}{b_{k+1}}$. Sada napokon možemo pojednostavniti zadani produkt:

$$a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n=\frac{b_2}{b_3}\cdot\frac{b_3}{b_4}\cdot\ldots\cdot\frac{b_{n-1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{b_2}{b_{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{n}{n+2}}=\frac{n+2}{3n}$$

□

Rastav na parcijalne razlomke

Ključna stvar za prepoznavanje teleskopske sume je uočavanje kada možemo članove zapisati kao razlike. Jedna od metoda koju ćemo najčešće primjenjivati je rastav na parcijalne razlomke. Slijedi primjer zadatka koji se lagano riješi teleskopiranjem.

Primjer 3. Izračunaj:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{499\cdot 500}$$

Rješenje 3. Prepoznajmo općeniti član $\dfrac{1}{k(k+1)}$. Traženu sumu možemo zapisati pomoću Σ notacije kao

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$

Riješit ćemo zadatak za općeniti n. Svaki član ove sume možemo rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Jednostavno je provjeriti da gornja jednakost vrijedi tako da svedemo razlomke na desnoj strani na zajednički nazivnik. Kada svaki pribrojnik od prvog do posljednjeg (n-tog) zapišemo u ovom obliku:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

primijetimo da se svi osim prvog i posljednjeg ponište, stoga preostaje samo:

$$1-\frac{1}{n+1}$$

Sada lako možemo uvrstiti $n=499$ da dobijemo konačno rješenje: $\dfrac{499}{500}$ □

Na parcijalne razlomke možemo rastaviti razlomak $\frac{P(x)}{Q(x)}$ kojem su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi i za njihove stupnjeve vrijedi $\deg P < \deg Q$. Međutim, ako taj uvjet nije zadovoljen, možemo podijeliti polinome pa dobiti novi razlomak za koji navedeni uvjet vrijedi. Dijeljenje polinoma je gradivo trećeg razreda srednje škole, ali preporučujem da naučite taj postupak ako ga još ne znate.

Primjer 4. Rastavi na parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{n(n+k)}$$

Rješenje 4. Ovo je općenitiji član nego u Primjeru 2. gdje je bilo $k = 1$. Za rastaviti na parcijalne razlomke, zapišimo razlomak kao sumu razlomaka čiji su nazivnici pojedinačni faktori nazivnika zadanog razlomka:

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+k}$$

Ovaj izraz vrijedi za svaki n uz neki fiksni k, kao što je u prethodnom primjeru to bio 1. Preostaje odrediti A i B. Izraz na desnoj strani možemo svesti na zajednički nazivnik pa izjednačiti brojnike:

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{A(n+k)+Bn}{n(n+k)}$$

$$\implies A(n+k)+Bn = 1$$

Odavde možemo nastaviti na dva načina. Jedan je da grupiramo izraze po potencijama n i izjednačimo svaki pojedinačno na obje strane, jer izraz vrijedi za sve n stoga se koeficijenti moraju podudarati:

$$An + Ak + Bn = 1 \iff (A+B)n + Ak = 0n + 1$$

odakle imamo sustav jednadžbi $A+B=0$ i $Ak=1$ pa dobijemo $A=\frac{1}{k}, B=-\frac{1}{k}$. Drugi, jednostavniji način je da uvrstimo neke n u prethodni izraz

$$A(n+k)+Bn = 1$$

Naime, ako taj izraz vrijedi za sve n, tada vrijedi i *za neke*, pa možemo uvrstiti proizvoljne, specifično $n=0$ i $n=-k$ da eliminiramo pojedine izraze. Tako dobivamo dvije jednadžbe: $Ak=1$ i $-Bk=1$ i u konačnici dolazimo do istog rješenja:

$$\frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}\right)$$

□

Pokazali smo na primjerima kako rastaviti na parcijalne razlomke kada su u nazivniku svi faktori linearni. Slijede dvije važne napomene za situacije u kojima to nije slučaj:

Napomena 6.3.1

Ako se u nazivniku pojavljuje kvadratni faktor koji se ne može faktorizirati, tada u odgovarajući brojnik stavljamo linearni izraz umjesto konstante:

$$\frac{x^2-2}{(7x-2)(x^2+x+3)} = \frac{A}{7x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+x+3}$$

Isto vrijedi i za veće stupnjeve: ako je faktor trećeg stupnja, u brojnik stavljamo kvadratni polinom itd. Uočite da je činjenica da za linearne faktore stavljamo konstanu u brojnik jednostavno posljedica ovoga.

Napomena 6.3.2

Ako se u nazivniku neki od faktora ponavlja (ima potenciju veću od 1), tada dodajemo po jedan parcijalni razlomak za svaku potenciju:

$$\frac{6x+5}{(x-4)^3(2x+1)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{(x-4)^2} + \frac{C}{(x-4)^3} + \frac{D}{2x+1}$$

Zadaci za zagrijavanje

1. Izračunaj:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{98\cdot 100}$$

2. Izračunaj:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{99\cdot 101}$$

3. Izračunaj:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{50}\right)$$

4. Izračunaj produkt:

$$\prod_{k=2}^{98}\frac{k^2}{k^2-1}$$

5. Izračunaj:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{99}{100!}$$

Napomena: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n = n\cdot(n-1)!$

6. Teleskopiranjem pribrojnika izvedi formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva:

$$1+2+\ldots+n = ?$$

Uputa: $k = \frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}$

Zadaci za vježbu

Zadaci su približno poredani po težini.

7. Izračunaj:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$$

8. Izračunaj:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

9. Izračunaj:

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

10. Izračunaj:

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}}$$

11. a) Izračunaj:

$$\frac{1}{1^4+1^2+1}+\frac{2}{2^4+2^2+1}+\ldots+\frac{n}{n^4+n^2+1}$$

b) Izračunaj:

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$$

12. Izračunaj:

$$\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\ldots+\frac{n^2+1}{n^2-1}$$

13. Izračunaj:

$$\frac{2}{4\cdot 1^2-1}+\frac{2}{4\cdot 2^2-1}+\ldots+\frac{2}{4\cdot n^2-1}$$

14. Izračunaj:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots$$

Uputa: prepoznaj opći član i teleskopiraj sumu članova od 1 do n

15. Fibonaccijev niz definiran je s $F_1=1$, $F_2=1$ i $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. Odredi:

$$F_1+F_2+F_3+\ldots+F_n$$

16. Izvedi formulu za prvih n kvadrata prirodnih brojeva:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\,?$$

Uputa: pogledajte Primjer 1.

17. Izvedi formulu za prvih n kubova prirodnih brojeva:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\,?$$

Uputa: pogledajte Primjer 1. i prethodni zadatak

18. Pojednostavni ovaj produkt:

$$(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{2^n}+3^{2^n}\right)$$

19. Pojednostavni sumu:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$$

20. Pojednostavni sumu:

$$(1^2+1+1)\cdot 1!+(2^2+2+1)\cdot 2!+\ldots+(n^2+n+1)\cdot n!=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k+1)k!$$

21. Pojednostavni sumu:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)!$$

22. Dokaži:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\left(\sqrt{n+1}-1\right)$$

23. Neka je $x\in\mathbb{R}^+$.

a) Pojednostavni ovu sumu:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

b) Pojednostavni ovu sumu:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n$$

Uputa: pomnoži i podijeli zadanu sumu istim izrazom tako da se teleskopira

24. Izračunaj:

$$\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \sin 3^\circ + \ldots + \sin 180^\circ$$

25. Niz a_n definiran je s: $a_1 = 1$ i $a_n = n(a_{n-1} + 1)$. Dokaži:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right)$$

26. Dokaži:

$$\sum_{k=1}^{n} k n^{n-k} \frac{(n-1)!}{(n-k)!} \; = \; n^n$$

6.4. N4: Mislav Plavac - MFT i Euler

Predavanje

Hintovi

Rješenja

Uvod

Mali Fermatov i Eulerov teorem važni su rezultati u teoriji brojeva koji nam pomažu odrediti odrediti ostatke pri dijeljenju i za velike brojeve određeog oblika (npr. potencije).
Prije iskazivanja teorema, prisjetimo se definicije i svojstava kongruencija te uvedimo neke nove pojmove

Definicija 6.4.1

Neka su $a, b \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je broj a *kongruentan* broju b *modulo* n ako vrijedi $n \mid a - b$.
Pišemo: $a \equiv b \pmod{n}$

Propozicija 6.4.2

Vrijede sljedeća svojstva kongruencija:

1. $a \equiv a \pmod{n}$ za sve cijele brojeve a i sve prirodne brojeve n
2. ako je $a \equiv b \pmod{n}$ onda je i $b \equiv a \pmod{n}$
3. ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $b \equiv c \pmod{n}$ onda je $a \equiv c \pmod{n}$
4. ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$ onda je $a + c \equiv b + d \pmod{n}$
5. ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $c \equiv d \pmod{n}$ onda je $ac \equiv bd \pmod{n}$
6. ako je $a \equiv b \pmod{n}$ i $k \in \mathbb{N}$ onda je $a^k \equiv b^k \pmod{n}$
7. ako je $ac \equiv bc \pmod{n}$ i $\mathrm{M}(c, n) = 1$ onda je $a \equiv b \pmod{n}$;
   općenito vrijedi ako je $ac \equiv bc \pmod{n}$ onda je $a \equiv b \pmod{\frac{n}{\mathrm{M}(n,c)}}$

Sada možemo iskazati Mali Fermatov teorem koji govori o ostatku pri dijeljenju koji daje broj oblika a^p za prirodan broj a i prost broj p.

Teorem 6.4.3: Mali Fermatov teorem

Ako je p prost broj tada za svaki prirodan broj a vrijedi $a^p \equiv a \pmod{p}$.
Specijalno, ako je $\gcd(a, p) = 1$ vrijedi $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

⚠ Oprez 2

Ne vrijedi obrat Malog Fermatovog teorema, tj. ako vrijedi $a^x \equiv a \pmod{x}$, ne znači nužno da je x prost.

Definicija 6.4.4: Eulerova funkcija

Neka je m prirodan broj. Funkciju $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takvu da je $\phi(m)$ jednako broju prirodnih brojeva relativno prostih s m koji su manji ili jednaki m zovemo *Eulerova funkcija*.

Propozicija 6.4.5

Za $n \in \mathbb{N}$ čiji su prosti faktori $p_1, p_2, \ldots, p_k$ vrijedi

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Općenitiji teorem od Malog Fermatovog teorema je Eulerov teorem (primijetimo kako je Mali Fermatov teorem zapravo samo poseban slučaj Eulerovog teorema na m prost broj jer je $\phi(p) = p-1$ za p prost).

Teorem 6.4.6: Eulerov teorem

Ako su a i m relativno prosti brojevi, vrijedi $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$.

Oprez

Kada primijenjujete Eulerov teorem pazite da su a i m relativno prosti. Česta greška je da se ovaj uvjet ne provjerava.

I za kraj, jedna korisna lema

Lema 6.4.7

Neka su a, n relativno prosti prirodni brojevi. Tada $a^b \equiv a^{b \pmod{\phi(n)}} \mod n$

Primjer 1. Odredite ostatak broja 5^{500} pri dijeljenju sa 7.

Primjer 2. Nađite zadnje dvije znamenke broja $3^{3^{3^3}}$.

Zadaci za samostalni rad

1. Izračunajte $2^{20} + 3^{30} + 4^{40} + 5^{50} + 6^{60} \pmod{7}$.
2. Nađite ostatak pri dijeljenju 2^{100} s $11, 25$ i 39.
3. Odredite zadnje 3 znamenke broja $9 \times 99 \times 999 \times \ldots 999$. Zadnji broj produkta sadrži 999 devetki.
4. Koliko ima prostih brojeva p takvih da $p | 29^p + 1$?
5. Neka je $a_n = 6^n + 8^n$. Odredite ostatak dijeljena a_{83} s 49.
6. Neka je $a_1 = 4, a_n = 4^{a_{n-1}}, n > 1$. Izračunajte $a_{100} \pmod{7}$.
7. Odredite
$$3!^{4!^{\cdots^{2019!}}} \pmod{11}.$$
8. Odredite sve proste brojeve p takve da $p \mid 4^p + 5^p$
9. Odredite sve proste brojeve p takve da $p^2 \mid 5^{p^2} + 1$
10. Dokažite da ako prost broj p dijeli $a^p - b^p$ za neke $a, b \in \mathbb{N}$, tada p^2 također dijeli $a^p - b^p$.
11. Pronađite sve prirodne brojeve n takve da je izraz $2^{2^n+1} + 2$ djeljiv sa 17.
12. Pokažite da $19 \mid 2^{2^{6k+2}} + 3$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$.

13. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da $n \mid 2^n + 1$ i pronađi sve takve proste n.ž

14. Neka je n prirodan broj takav da je $n \geq 3$. Pokažite da je

$$n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$$

djeljiv sa 1989 za svaki takav n.

15. (a) Dokažite da za cijeli x broj $x^2 + 1$ nema djelitelja oblika $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}_0$).

(b) Dokažite da jednadžba $y^2 = x^3 + 7$ nema rješenja u cijelim brojevima.

(c) Odredite sve parove (m, n) prirodnih brojeva takve da je $4mn - m - n$ potpuni kvadrat.

16. Dokažite da $p^2 | 1^{p+2} + 2^{p+2} + ... + (p-1)^{p+2}$

17. Neka je a_n niz zadan sa

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Odredite sve prirodne brojeve koji su relativno prosti sa svakim članom zadanog niza.

6.5. X4: Mislav Brnetić - Princip ekstrema

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Princip ekstrema metoda je rješavanja zadataka (najčešće iz kombinatorike, ali može se primijeniti i u drugim područjima) u kojoj promatramo nekakav ekstrem, odnosno element ili situaciju koji su minimalni/maksimalni po nekom svojstvu.
Princip ekstrema često se kombinira s metodom kontradikcije. Prvo pretpostavimo suprotno od onoga što želimo dokazati, zatim odaberemo neki ekstrem, a onda konstruiramo još ekstremniji element ili situaciju. Time postignemo kontradikciju i dokažemo originalnu tvrdnju zadatka.
Prisjetimo se nekih dobro poznatih činjenica:

1. Svaki konačan neprazan skup prirodnih ili realnih brojeva ima (ne nužno jedinstveni) minimalan i maksimalan element.

2. Svaki neprazni podskup prirodnih brojeva ima najmanji element.

3. Beskonačni podskup realnih brojeva ne mora imati minimum i maksimum, čak i ako je ograničen.

Sada promotrimo dva primjera u kojima ćemo koristiti princip ekstrema.

Primjer 1. Na zabavi se nalazi 10000 ljudi. U nekom trenutku neke su se osobe počele rukovati. Dokažite da postoje 2 osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

Rješenje 1. Pretpostavimo da tvrdnja zadatka ne vrijedi, odnosno nijedne dvije osobe nisu rukovale s istim brojem ljudi.
Budući da se osoba ne može rukovati sama sa sobom, može se rukovati s najviše 9999 ljudi, a najmanje s 0. To znači da ukupno ima 10000 različitih ljudi s kojima se neka osoba mogla rukovati, a kako se 10000 osoba rukovalo, slijedi da za svaki broj od 0 do 9999 postoji osoba koja se rukovala s tim brojem ljudi.
To znači da postoji osoba koja se nije rukovala ni s kim i osoba koja se rukovala sa svima, a to je nemoguće jer se nije mogla rukovati s osobom koja se nije rukovala ni s kim. □

Primjer 2. Dokažite da jednadžba $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$ nema rješenja u prirodnim brojevima.

Rješenje 2. Pretpostavimo suprotno, odnosno da jednadžba ima rješenje u prirodnim brojevima.
Kako svaki podskup prirodnih brojeva ima minimalni element i $a^2 + b^2 \in \mathbb{N}$ možemo odabrati ono rješenje takvo da je $a^2 + b^2$ minimalno, označimo ga s (a_0, b_0, c_0, d_0). Kako 3 dijeli desnu stranu jednadžbe, 3 mora dijeliti i lijevu stranu.
Kako potpuni kvadrati mogu davati samo ostatke 0 i 1 pri dijeljenu s 3, nužno je da je a_0 djeljivo s 3 i b_0 djeljivo s 3.
Stoga zapišimo a_0 i b_0 u obliku $a_0 = 3k$, $b_0 = 3j$.
Tada je

$$9k^2 + 9j^2 = 3(c_0^2 + d_0^2).$$

Dijeljenjem s 3 zaključujemo kako je i (c_0, d_0, k, j) također rješenje zadane jednadžbe, međutim $c_0^2 + d_0^2 < a_0^2 + b_0^2$, odnosno pronašli smo rješenje za koje je $a^2 + b^2$ manje od minimalnog, čime smo dobili kontradikciju. □

Zadaci

1. 20 realnih brojeva poredano je u krug, na način da se između svaka 2 broja a i b nalazi broj $\frac{a+b}{2}$. Dokažite da su svi brojevi u krugu jednaki.

2. Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.

3. Riješite sustav jednadžbi u skupu $\mathbb{R}$:

$$(x+y)^3 = z$$
$$(y+z)^3 = x$$
$$(x+z)^3 = y$$

4. U ravnini se nalazi skup točaka takav da je svaka točka polovište neke dužine čije su krajnje točke također iz tog skupa. Dokažite da je taj skup točaka beskonačan.

5. Dokažite da je u svakom konveksnom peterokutu moguće odabrati tri dijagonale koje čine trokut.

6. Svaka cesta u Sikiniji je jednosmjerna. Svaki par gradova je povezano točno jednom direktnom cestom. Dokažite da postoji grad iz kojeg se može doći u svaki drugi koristeći najviše dvije ceste.

7. Brojevi od 1 do n^2 upisani su na ploču $n \times n$. Dokažite da postoje susjedna polja takva da se brojevi na njima razlikuju više od n. Susjedna polja su polja koja dijele zajednički vrh.

8. Dano je n točaka u ravnini, od kojih svake tri tvore trokut površine manje ili jednake od 1. Dokažite da sve točke leže unutar nekog trokuta površine manje ili jednake od 4.

9. U Sikinijskom Parlamentu svaki zastupnik ima najviše tri neprijatelja. Dokažite da je zastupnike moguće podijeliti u dvije sobe tako da svaki ima najviše jednog neprijatelja u svojoj sobi. Neprijateljstva su uzajamna.

10. Neparan broj ljudi stoji u ravnini tako da su sve međusobne udaljenosti različite. Istovremeno svatko upuca svog najbližeg susjeda. Dokažite da:

(a) postoji par ljudi koji su pucali jedno u drugog,
(b) skup dužina koje čine putanje metaka ne sadrži zatvorenu liniju tj. poligon,
(c) barem jedna osoba preživi, tj. postoji osoba koju nitko nije upucao,
(d) svaku osobu upucalo je najviše 5 ljudi.

11. U ravnini se nalazi konačno crvenih i plavih točaka. Na svakoj dužini čiji su krajevi crvene točke postoji plava točka, a na svakoj dužini čiji su krajevi plave točke, postoji crvena točka. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

12. (Sylvester-Gallai teorem) Dano je konačno mnogo točaka u ravnini takvih da nisu sve kolinearne. Dokaži da postoji par točaka koje leže na pravcu na kojem ne leži nijedna od preostalih zadanih točaka.

7. Zadaci za petu grupu

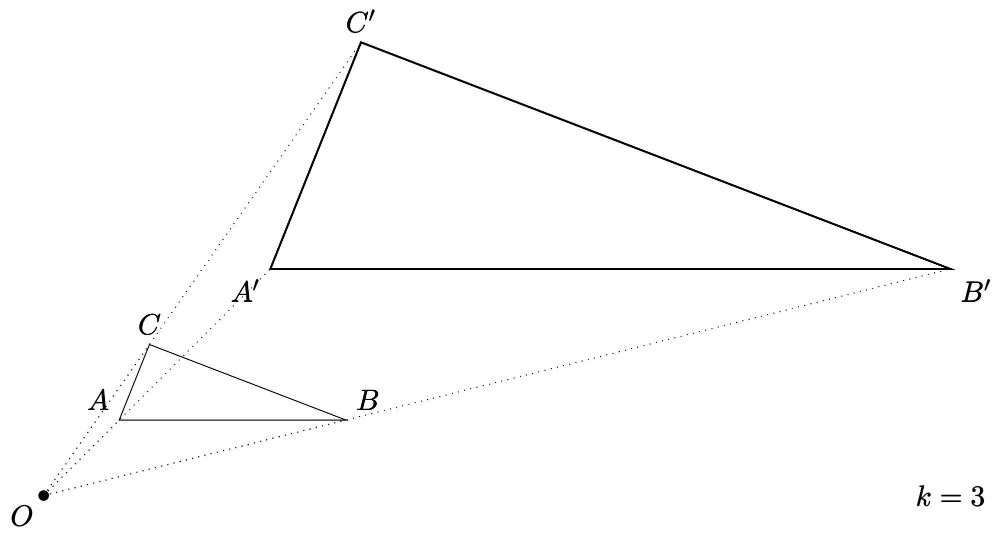
7.1. G5: Karla Pogelšek - Homotetija i spiralna sličnost

Predavanje   Hintovi   Rješenja

Uvod

Homotetija

Homotetiju možemo zamisliti kao zumiranu sliku nekog trokuta, dužine, kružnice i sl. Malo formalnije ćemo to reći ovako: Homotetija s koeficijentom k (gdje $k \in \mathbb{R}$) iz središta O je preslikavanje ravnine koje toču T šalje u točku T' tako da vrijedi $\overline{OT'} = k \cdot \overline{OT}$.



Na slici vidimo originalni trokut ABC te trokut $A'B'C'$ koji je nastao homotetijom iz centra O s koeficijentom $k = 3$. Možemo primijetiti nekoliko pravilnosti:

- točke O, T i T' su kolinearne
- paralelnosti, kolinearnosti i kutovi ostaju očuvani (npr. $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ i $\angle CBA = \angle C'B'A'$)
- $|A'B'| = |AB| \cdot |k|$
- ako je $k < 0$ onda se O nalazi između T i T'
- Ako imamo dva nesukladna trokuta ABC i $A'B'C'$ takve da je $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ i $\overline{CA} \parallel \overline{C'A'}$, postoji homotetija koja šalje trokut ABC u trokut $A'B'C'$ trokut ABC je također nastao homotetijom trokuta $A'B'C'$ iz centra O s koeficijentom $k = \frac{1}{3}$

primjeri

Ovo su neki primjeri poznatih konfiguracija koji su lako dokazivi homotetijom:

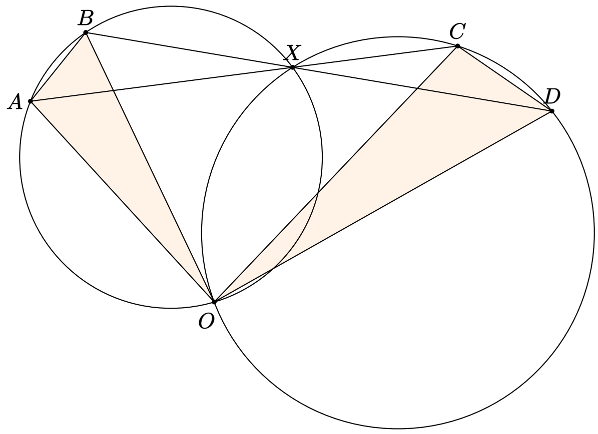
- pripisana kružnica
- Eulerov pravac
- kružnica 9 točaka

Spiralna sličnost

Spiralna sličnost je kompozicija rotacije i homotetije iz istog centra.

Teorem 7.1.1

Neka su dane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Tada je središte spiralne sličnosti koja šalje jednu od tih dužina u drugu dugi presjek kružnice ABP i kružnice CDP gdje je P presjek AC i BD.



Lakši zadaci

1. Kvadrat $PQRS$ upisan je u kružnicu. Iz točke A van te kružnice povučene su tangente na kružnicu koje pravac PR sijeku u K, L. Pravci AQ i AS sijeku PR redom u M, N. Dokažite $|KM| = |LN|$.

2. Neka je N polovište luka $\overset{\frown}{ABC}$ opisane kružnice trokuta $\triangle ABC$ i neka su NP, NT tangente na upisanu kružnicu trokuta tako da su P i T na upisanoj kružnici. BP i BT sijeku kružnicu (ABC) u točkama P_1 i T_1. Dokaži da je $PP_1 = TT_1$.

3. $ABCD$ je jednakokračan trapez takav da je $AB||CD$. ω je kružnica kroz C i D te siječe CA i CB u točkama A_1 i B_1. Točke A_2, B_2 su simetrične točkama A_1 i B_1 s obzirom na polovišta stranica CA i CB. Dokaži da su točke A, B, A_2, B_2 konciklične.

Teži zadaci

1. Neka je $\triangle ABC$ šiljastokutan trokut tako da $|AB| \neq |AC|$. H je ortocentar trokuta $\triangle ABC$ i M polovište $\overline{BC}$. Točke D i E redom na $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ su takve da je $|AE| = |AD|$ i D, H, E su kolinearne. Dokaži da je pravac HM okomit na radikalnu os kružnic opisanih trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$.

2. Dvije kružnice jednakih radiusa, ω_1 i ω_2 sijeku se u točkama X_1 i X_2. Kružnica ω dira kružnicu ω_1 izvana u točki T_1 i kružnicu ω_2 iznutra u točki T_2. Dokaži da se pravci X_1T_1 i X_2T_2 sijeku u točki koja leži na kružnici ω.

3. Kružnica ω_1 prolazi kroz vrh A paralelograma $ABCD$ i dira polupravce CB i CD. Kružnica ω_2 dira polupravce AB i AD te kružnicu ω_1 izvana u točki T. Dokaži da točka T leži na pravcu AC.

4. Točke X i Y su na produžecima stranica AB i AC preko vrhova B i C takve da je $BX = CY$. Kružnice (AXC) i (AYB) se sijeku u A i Z. Dokaži da točka Z leži na simetrali kuta $\angle CAB$.

5. Dan je trokut $\triangle ABC$. Neka je r_A pravac koji prolazi kroz polovište stranice $\overline{BC}$ i okomit je na unutrašnju simetralu kuta $\sphericalangle BAC$. Analogno definiramo i r_B, r_C. Neka su H, I ortocentar i centar upisane od $\triangle ABC$. Pretpostavimo da pravci r_A, r_B, r_C čine trokut (u općem su položaju). Dokažite da je centar opisane kružnice tog trokuta polovište $\overline{HI}$.

6. Neka je ABC trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC| < |BC|$. Označimo središte upisanekružnice i upisanu kružnicu od ABC redom sa I i ω. Neka je X točka na pravcu BC različita od$C$ takva da je pravac kroz X paralelan s AC tangenta na ω. Slično, neka je Y točka na pravcu BCrazličita od B takva da je pravac kroz Y paralelan s AB tangenta na ω. Pravac AI siječe opisanu kružnicu od ABC u točki $P \neq A$. Neka su K i L redom polovišta dužina AC i AB. Dokaži da vrijedi $\angle KIL + \angle YPX = 180°$

7.2. C5: Emanuel Bajamić - Teorija grafova

Predavanje Hintovi Rješenja

Napomena 7.2.1

Petu grupu čine već začinjeni matematičari od kojih se očekuje da znaju sav potreban teorijski dio predavanja.

Zadaci

1. Neka je n prirodan broj. U nekoj državi postoji n gradova tako da su svaka dva grada povezana jednom jednosmjernom avionskom linijom. Dokaži da je moguće napraviti put od $n-1$ letova u kojem svaki grad (uključujući onaj iz kojeg smo krenuli) posjećujemo točno jednom.

2. U nekom arhipelagu je n otoka među kojima prometuju dvosmjerne brodske i avionske linije. Između svaka dva otoka postoji točno jedna direktna linija – ili brodska, ili avionska. Kažemo da je arhipelag uredno povezan ako svako kružno turističko putovanje koje počinje i završava na istom otoku koristi paran broj avionskih linija.

   Za koje prirodne brojeve n svaki uredno povezan arhipelag s n otoka ima paran broj avionskih linija?

3. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

4. U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove. Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno. Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.

5. U nekom arhipelagu nalazi se 2017 otoka nazvanih $1, 2, \ldots, 2017$. Dvije agencije, Crveni zmaj i Plavo oko, dogovaraju se oko rasporeda brodskih linija između pojedinih otoka. Za svaki par otoka, točno jedna agencija će organizirati brodsku liniju i to samo u smjeru od otoka nazvanog manjim brojem do otoka nazvanog većim brojem. Raspored brodskih linija je dobar ako ne postoje dva otoka s oznakama $A < B$ takva da je s otoka A na otok B moguće doći koristeći samo brodove Crvenog zmaja, a također i koristeći samo brodove Plavog oka. Odredi ukupan broj dobrih rasporeda brodskih linija.

6. Za tročlani podskup skupa prirodnih brojeva kažemo da je $jeftin$ ako u njemu postoje dva broja koja su relativno prosta te dva broja od kojih jedan dijeli drugoga. Dan je prirodni broj n. Koliko najviše jeftinih tročlanih podskupova može imati skup koji sadrži točno $2n+1$ prirodnih brojeva?

7. The kingdom of Anisotropy consists of n cities. For every two cities there exists exactly one direct one-way road between them. We say that a path from X to Y is a sequence of roads such that one can move from X to Y along this sequence without returning to an already visited city. A collection of paths is called diverse if no road belongs to two or more paths in the collection. Let A and B be two distinct cities in Anisotropy. Let N_{AB} denote the maximal number of paths

in a diverse collection of paths from A to B. Similarly, let N_{BA} denote the maximal number of paths in a diverse collection of paths from B to A. Prove that the equality $N_{AB} = N_{BA}$ holds if and only if the number of roads going out from A is the same as the number of roads going out from B.

8. Neka je n pozitivan cijeli broj. *Japanskitrokut* sastoji se od $1 + 2 + ... + n$ krugova posloženih u oblik jednakostraničnog trokuta tako da za svaki $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi da i-ti redak sadrži točno i krugova, od kojih je točno jedan obojan u crveno. *Ninjaput* u japanskom trokutu je niz od n krugova dobijen kretanjem iz kruga u prvom retku te uzastopnim prelascima iz trenutnog kruga na jedan od dva kruga u idućem retku koji su neposredno ispod trenutnog kruga. Niz završava nakon što dođemo u najdonji redak. U ovisnosti o n, nađi najveći k takav da u svakom japanskom trokutu postoji ninja put koji sadrži barem k crvenih krugova.

9. Let $n \geq 2$ be a positive integer. Paul has a 1 by n^2 rectangular strip consisting of n^2 unit squares, where the ith square is labelled with i for all $1 \leq i \leq n^2$. He wishes to cut the strip into several pieces, where each piece consists of a number of consecutive unit squares, and then translate (without rotating or flipping) the pieces to obtain an n by n square satisfying the following property: if the unit square in the i-th row and j-th column is labelled with $a_{i,j}$, then $a_{i,j} - (i + j - 1)$ is divisible by n. Determine the smallest number of pieces Paul needs to make in order to accomplish this.

10. Dano je $4n$ kamenčića težina $1, 2, 3, ..., 4n$. Svaki kamenčić je obojen jednom od n boja i svakom bojom su obojena točno četiri kamenčića. Dokaži da se kamenčiće može podijeliti u dvije hrpe tako da vrijede oba sljedeća uvjeta:

- Ukupne težine obje hrpe su jednake.
- Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.

7.3. A5: Mislav Plavac - Funkcijske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Funkcijske jednadžbe su poseban tip jednadžbi u kojima ne tražimo samo nepoznatu brojačnu vrijednost već trebamo odrediti neku funkciju tako da vrijedi traženi izraz i sve češće se pojavljuju na olimpijadama i državnim natjecanjima. Cilj ovog predavanja je vidjeti neke najčešće i osnovne trikove pri rješavanju takvih jednadžbi.
S obzirom da je pretpostavka predavanja da ste već upoznati s osnovama funkcijskih jednadžbi, ovdje su navedena neka svojstva funkcija koja imaju naziv i često se javljaju kod rješavanja funkcijskih jednadžbi.

Definicija 7.3.1: Svojstva funkcija

Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je:

- **injekcija** ako $f(x) = f(y)$ povlači $x = y$.
- **surjekcija** ako za svaki element b skupa B postoji element a skupa A takav da je $f(a) = b$.
- **bijekcija** ako je ujedno i injekcija, i surjekcija.
- **involucija** ako vrijedi $f(f(a)) = a$, za svaki $a \in A$.
- **parna** ako vrijedi $f(x) = f(-x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.
- **neparna** ako vrijedi $f(-x) = -f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

Uvrsti i moli se

Generalno nam je u zadatku zadano da nešto vrijedi za sve elemente nekog skupa, a ako vrijedi za sve vrijedi i za neki specifičan element koji možemo uvrstit. Ideja je pokratit nešto, eliminirat neki član ili pojednostavit izraze.

Primjer 1 (Žajina metoda). Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x)f(y) = f(x - y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Primjer 2 (Forsiranje skraćivanja). Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x^2 + y) = f(x^{27} + 2y) + f(x^4), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Primjer 3 ((A)simterija). Odredite sve injektivne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x + f(y)) + f(xy) = f(x + 1)f(y + 1) - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Onaj lik na C

Slijedi jedan standardni oblik funkcijske jednadžbe, **Cauchyeva funkcijska jednadžba** nad nekom domenom D.

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in D$$

Nad racionalnima se induktivno pokaže da vrijedi $f(q) = q \cdot f(1) \quad \forall q \in \mathbb{Q}$, ali što s ostalim domenama? Idući teorem navodi neke česte uvjete koji također garantiraju da su jedina rješenja konstantna ili linearna.

Teorem 7.3.2

Cauchyeva funkcijska jednadžba $f : D \to \mathbb{R}$ $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ima samo rješenja oblika $f(x) = f(1) \cdot x$ ako

- f je diferencijabilna
- f je neprekidna
- f monotona
- $f \geq 0 \quad \forall x \geq 0$ (ili omeđena na bilo kojem netrivijalnom intervalu)
- $D \subseteq \mathbb{Q}$

Primjer 4. Odredite sve $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{i} \quad f(xy) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Ponekad nam je poskrivećki zadana Cauchyeva te ju možemo nekom algebarskom manipulacijom dovesti do standardnog oblika te se pozvati na nešto iz teorema.

Primjer 5 (IMO 2019. P1). Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da vrijedi

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Nešto je trulo u ~~državi Danskoj~~ ovom rješenju

Ponekad tijekom rješavanja zadatka jako želimo da nešto vrijedi i stoga predvidimo neku suptilnost. Najčešće je ta greška u zaključivanju **pointwise trap**.

Primjer 6. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$xf(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Primjer 7. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

⚠ Oprez

UVIJEK provjerite rješenja koja dobijete.

Zadaci

Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$, a a $\{x\}$ označavamo decimalni dio, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x) + xf(1-x) = 2x^2 - 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

2. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x)f(y) = xf(y) + y + 1 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

3. Odredite sve injektivne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x + f(x + y^2) + y) = f(2x - y) + 3y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

4. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x + 3y) = 5f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

5. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$xf(x) = \lfloor x \rfloor f(\{x\}) + \{x\} f(\lfloor x \rfloor), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

6. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $x + f(x) = f(f(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Nađite sve x takve da $f(f(x)) = 0$.

7. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$xf(x) + yf(y) = (x + y)f(x + y) - 2xy \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

8. Nađite sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

9. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x\lfloor y \rfloor) + f(y\{x\}) = f(y\lfloor x \rfloor) + f(x\{y\}), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

10. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da vrijedi

$$f(x) + f(y) = f(x + y) + 2f(xy) - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

11. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Ako je f strogo rastuća surjekcija, tada je $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

12. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

13. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x + f(y)) = f(f(y)) + 2xf(y) + x^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

14. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(a^2 + ab + f(b^2)) = af(b) + b^2 + f(a^2), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

15. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(5f(a)) = a + 2025, \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

16. Neka je $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. Odredite sve $f : \mathbb{Q}^+ \to (\alpha, +\infty)$ takve da vrijedi

$$f\left(\frac{x + y}{\alpha}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{\alpha} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}^+$$

17. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(xf(x) + f(xy)) = f(x^2) + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

18. Postoji li funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takva da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(f(n)) = f(n + 1) - f(n)$?

19. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da vrijedi

$$f(m^2 + mf(n)) = mf(m + n), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0$$

20. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

21. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

7.4. N5: Lana Milani - TB funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci za samostalni rad

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje je $f(a) \neq b$ vrijedi: $f(a) - b \mid f(a)^2 + 2b + 1 - f(b)^2$

2. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koje zadovoljavaju sljedeća dva uvjeta:
   - Za sve $a, b \in \mathbb{N}$ vrijedi $f(a, b) + a + b = f(a, 1) + f(1, b) + ab$
   - Ako su $a, b \in \mathbb{N}$ takvi da je neki od brojeva $a + b$ i $a + b - 1$ djeljiv prostim brojem $p > 2$, onda je i $f(a, b)$ djeljiv s p.

3. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da: $m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$

4. Dan je prirodni broj C. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sa sljedećim svojstvom: za sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje je $a + b > C$, vrijedi $a + f(b) \mid a^2 + bf(a)$.

5. Neka je $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, ..., 10^{100}\}$ funkcija za koju vrijedi $gcd(f(x), f(y)) = gcd(f(x), x - y)$ za sve $x, y \in \mathbb{N}$. Dokaži da postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da $f(x) = gcd(m + x, n)$ za sve $x \in \mathbb{N}$.

6. Odredi sve funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da $f(n!) = f(n)!$ za sve prirodne n i takvi da $m - n \mid f(m) - f(n)$ za sve različite m, n.

7. Neka funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija ima sljedeća svojstva:
   (i) Ako $m, n \in \mathbb{N}$, onda
   $$\frac{f^n(m) - m}{n} \in \mathbb{N}.$$
   (ii) Skup $\mathbb{N} \setminus \{f(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ je konačan.

   Dokaži da je niz $f(1) - 1,\ f(2) - 2,\ f(3) - 3,\ \ldots$ periodičan.

8. Za neki prirodni broj k, funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je *k-dobra* ako
   $$\gcd\left(f(m) + n,\ f(n) + m\right) \leq k$$
   za sve $m \neq n$. Nađi sve k takvi da postoji *k-dobra* funkcija.

7.5. X5: Karlo Jokoš - Global ideja

Predavanje   Hintovi   Rješenja

Uvod

Što je global ideja?

'Global' zadatci posebna je kategorija zadataka u kojima možemo izvući netrivijalne informacije o zadatku tako da gledamo cijelu strukturu zadatka odjednom (suprotan pristup zadatcima je 'Local' pristup koji se zasniva na gledanje kako se struktura mijenja kada napravimo malu promjenu). Stereotipičan (i lagan) primjer global pristupa je *Handshake lema*

Primjer 1. Neka je G konačan graf. Dokaži da je zbroj svih stupnjeva vrhova paran broj.

Rješenje 1. Tvrdimo da je zbroj stupnjeva jednak dvostrukom zbroju stranica grafa G. Ovo vrijedi jer pri zbrajanju stupnjeva svaku stranicu prebrojimo dvaput (jednom iz jednog vrha stranice, a drugi put iz drugog). □

Napomena: Global psihologija - handshake lemma

Kao i u svakom kombinatornom zadatku, gornji zadatak krenuli smo s gledanjem malih primjera. Gledali smo kako se struktura mijenja kada negdje dodamo stranicu u grafu ili kada ju negdje oduzmemo. Međutim, vrlo brzo se da shvatiti da se unošenjem ikakvih modifikacija situacija u grafu znamenito mijenja. Dakle, ne možemo *jednostavno* pratiti kako se struktura mijenja pri našim promjenama. To nas motivira da nekako pokušamo čitavu strukturu obuhvatiti jednom jednadžbom, odnosno jednim argumentom $\implies$ global metoda.

Budući da su zadatci jako raznovrsni, ne postoji konkretan *recept* kako pristupati global zadatcima (kao što ćete vidjeti, zadatci ne moraju biti ni kombinatorni). No, postoje pristupi koji su česti:

- prebrojavanje
- dvostruko prebrojavanje (linearnost očekivanja [1])
- Dirichletov princip
- bojanje

Krenimo sada na konkretne zadatke

Riješeni primjeri

Primjer 2. Za pozitivne prirodne brojeve $n > 2$ promotrimo $n-1$ razlomaka

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n}{n-1}.$$

Umnožak ovih razlomaka je n, ali ako bismo uzeli recipročnu vrijednost nekih od razlomaka, umnožak će se promijeniti. Za koje n umnožak može postati 1?

[1]* Linearnost očekivanja močan je alat koji ubija zadatke iz dvostrukog prebrojavanja i Dirichletovog principa. Zasniva se na ideji da je očekivanje linearno.

Rješenje 2. Tvrdnja: n mora biti potpun kvadrat
Dokaz: u finalnoj konstrukciji umnožak brojnika i nazivnika mora biti jednak, dakle umnožak svih brojnika i nazivnika je kvadrat broja. Taj umnožak je jednak

$$2^2 \cdot 3^2 \cdots (n-1)^2 \cdot n$$

dakle, n doista mora biti kvadrat.

Konstrukcija za $n = k^2$:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k+2}{k+1} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1}\right) = \frac{n}{k^2} = 1.$$

□

Napomena: Zašto je ovaj primjer global?

Zadatak se počinje isprobavanjem malih primjera i pokušavanjem sriktat da ukupan razlomak bude 1. Vrlo brzo uočavamo da ta cijela stvar postane jako brzo zapetljanja, naprimjer, ako imamo u nizu zapisani $\frac{3}{2}$ i $\frac{3}{4}$, sada već moramo paziti i na to da nam se u nazivniku mora pojaviti broj 9. Nastavljanjem dalje problemi se samo nižu. Dakle, nama je bilo potrebno nešto što će pogledati cijelu strukturu odjednom.

Primjer 3. Teki izrađuje veliku ogrlicu od perli označenih brojevima $290, 291, \dots, 2023$. Svaku perlu koristi točno jednom, raspoređujući ih u bilo kojem redoslijedu. Dokaži da bez obzira na redoslijed, uvijek postoje tri uzastopne perle čije oznake predstavljaju duljine stranica nekog trokuta.

Rješenje 3. Pretpostavimo suprotno. Trojka $x < y < z$ ne formira trokut ako $2z \geq x+y+z$ (odsnosno najveći broj u trojci je veći od sume ostala 2 broja u trojci). Neka T bude skup svih trojki. Sada zbrajanjem nejednakosti koje smo dobili od svih trojki dobivamo

$$2 \cdot \sum_{t \in T} \max(t) \geq 3 \sum_{i=290}^{2023} i$$

pri čemu $\max(t)$ broj u trojci s maksimalnom vrijednosti. Desna strana nejednakosti proizlazi iz činjenice da se svaka perla u sumi pojavljuje tri puta. Možemo pronaći maksimalnu vrijednost lijeve strane nejednakosti, budući da se svaka perla pojavljuje točno 3 puta i imamo 1734 trojki, maksimum je postignut kada se tri puta pojave perle s vrijednosti $2023, 2022, \dots, 1446$. Prema tome, maksimalna vrijednost lijeve strane nejednakosti je

$$2(3(2023 + 2022 + \dots + (2023 - 1446))) = 6 \cdot \frac{(2023 + 1446)(2023 - 1446 + 1)}{2}$$
$$= 3(3469)(578)$$

Odnosno imamo nejednakost

$$3(3469)(578) \geq 2 \cdot \sum_{t \in T} \max(t) \geq 3 \cdot \frac{(2313)(1734)}{2}, \text{ tj. imamo}$$

$$(3469)(578) \geq (2313)(867) \iff 2005082 \geq 2005371$$

Kontradikcija. □

Napomena: Zašto je ovaj primjer global?

Dokaz da postoji barem nekoliko elemenata koji zadovoljava neki uvjet generalno je dosta teško dokazati, zato se uglavnom pretpostavlja suprotno. Budući da u ovom slučaju suprotnom podrazumijeva da nije nema uzastopne trojke koje su stranice trokuta, želimo to iskoristiti te gradimo sumu koju smo izgradili.

Primjer 4 (Teži primjer). Nađi sve prirodne brojeve n za koje je moguće svako polje tablice $n \times n$ ispuniti jednim od slova A, B i C tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

- u svakom retku i svakom stupcu, jedna trećina slova su A, jedna trećina su B, a jedna trećina tih slova su C;
- u svakoj dijagonali, ako je broj slova upisanih u tu dijagonalu višekratnik broja 3 onda su jedna trećina tih slova A, jedna trećina su B, a jedna trećina su C.

Rješenje 4. Odgovor su svi n djeljivi s 9, konstrukcija je:

A	A	A	B	B	B	C	C	C
B	B	B	C	C	C	A	A	A
C	C	C	A	A	A	B	B	B
A	A	A	B	B	B	C	C	C
B	B	B	C	C	C	A	A	A
C	C	C	A	A	A	B	B	B
A	A	A	B	B	B	C	C	C
B	B	B	C	C	C	A	A	A
C	C	C	A	A	A	B	B	B

Sada ćemo pokazati da je nužno da $9 \mid n$.

Naravno moramo imati $3 \mid n$ (jer u retku/stupcu trećina elemenata mora biti A/B/C). Neka $n = 3k$. Podijelimo našu $3k \times 3k$ ploču na 3×3 ploče kao što je prikazano na gornjoj skici.

Nazovimo kvadrat u sredini 3×3 ploče *lijepim*. Također, svaki redak/stupac/dijagonalu nazovimo *lijepom dužinom* ako sadrži barem jedan lijep kvadrat. Prebrojimo koliko kvadrata oslovljena s A pokriju lijepe dužine (uzeli smo A nasumično).

- Svaki redak/stupac ima k elemenata A, imamo ukupno $2k$ lijepih redaka i stupaca zajedno, prema tome, oni generiraju $2k^2$ slova A
- Dijagonale koja prolaze kroz lijepi kvadrat pokrivaju broj kvadrata koji je djeljiv s 3. Dakle, broj pojavljivanja A je

$$2(1 + 2 + \cdots + (k-1) + k + (k-1) + \cdots + 1) = 2k^2$$

Dakle, prebrojali smo ukupno $N = 4k^2$ pojavljivanja A.

Tvrdimo da je N kongruentan s pravim brojem pojavljivanja A modulo 3.

U našem prebrojavanju slova A, naši retci, stupci i dijagonale pokrili su cijelu ploču tako da su kroz lijepe kvadrate prošli četiri puta, a kroz ostale kvadrate jednom. Recimo da se A nalazio na lijepom kvadratu, tada smo ga prebrojali 4 puta, no kako je $4 \equiv 1 \pmod 3$, broj prebrojavanja koji imamo kongruentan je sa situacijom da smo ga prebrojali samo jedanput modulo 3 Prebrojavanjem po retcima vidimo da je ukupan broj pojavljivanja A jednak $3k^2$. Sada vrijedi kongruencija:

$$4k^2 \equiv 3k^2 \pmod 3 \iff k^2 \equiv 0 \pmod 3$$

□

Dakle $3 \mid k$, odnosno $9 \mid n$.

Napomena: Zašto je ovaj primjer global?

Kao i prije, pokušavat pronaći neku učestalost u pojavljivanju A, B, C je dosta teško jer postoji ekstremno mnogo kombinacija. Upravo zato želimo sistematički pregled pojavljivanja nekog slova na cijelog ploči (pravila koja su nam dana u zadatku definiraju učestalost pojava slova A, B, C na čitavoj ploči)

Zadaci za samostalni rad

1. Neka S bude set od 27 različitih neparnih prirodnih brojeva manjih od 100. Dokaži da postoje dva elementa u S sa sumom 102.

2. 15 topova postavljeno je na 15×15 šahovsku ploču, nijedan od kojih se međusobno ne napadaju (odnosno nisu ni u istom redu ni u istom stupcu). Pretpostavimo da svaki top napravi potez kao konj, dokaži da će se nakon ovoga barem 2 topa nužno napadat.

3. Na turniru svaki igrač igra točno jednu igru protiv drugih igrača. U svakoj igri pobjednik dobiva 1 bod te gubitnik dobiva 0 bodova. Pri izjednačenju, oba igrača dobivaju $\frac{1}{2}$ boda. Nakon što je turnir završio, pronađeno je da je točno pola bodova zarađenih od svakog igrača zarađeno boreći se s deset igrača koji su imali najmanje bodova. (Preciznije, svaki od deset igrača s najmanje bodova dobilo je pola svojih bodova boreći se s ostalih 9 igrača s najmanje bodova). Koliko je ukupno sudionika bilo na natjecanju?

4. Allison ima 9×9 kvadratnu ploču te svaki kvadrat ploče ima 4 prijatelja (rubnim kvadratima su nasuprotni rubni kvadrati prijatelji). Allison svaki kvadrat boja jednom od 3 boje: zeleno, plavo i crveno te nakon toga u svaki kvadrat upisuje broj prema sljedećim pravilima:

   - Ako je kvadrat zelen, napiši broj crvenih prijatelja + dvostruki broj plavih prijatelja.
   - Ako je kvadrat crven, napiši broj plavih prijatelja + dvostruki broj zelenih prijatelja.
   - Ako je kvadrat plav, napiši broj zelenih prijatelja + dvostruki broj crvenih prijatelja.

   Uzevši u obzir da Allison sama bira kako će obojati kvadrate na ploči. pronađi maksimalan zbroj svih kvadrata koje ona može postići.

5. 11 studenata piše ispit. Za bilo koja 2 pitanja u testu postoji barem 6 studenata koji su riješili točno jedno od ta dva pitanja. Dokaži da na ispitu nema više od 12 pitanja.

6. Neka je n pozitivan cijeli broj. Želimo postaviti m polukraljica na šahovsku ploču dimenzija $n \times n$; one mogu napadati vodoravno, okomito ili po dijagonali prema dolje-desno/gore-lijevo (tj. u šest smjerova), a napadaju i polje na kojem se nalaze. Odredite najmanji m takav da postoji raspored u kojem je svako polje na ploči napadnuto barem jednom polukraljicom.

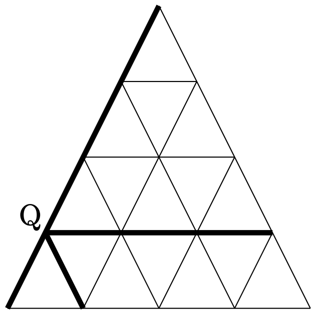
7. Pravokutna mreža G ima neparan broj jediničnih kvadratnih polja. Mreža je razrezana duž svojih mrežnih linija na nekoliko pravokutnika (čije su stranice paralelne s mrežom). Dokažite da postoji jedan pravokutnik R u toj razdiobi koji ima sljedeće svojstvo: udaljenosti od R do sve četiri strane G su ili sve neparne ili sve parne.

8. Dokaži da za bilo koje kompleksne brojeve $z_1, z_2, \ldots, z_n$ za koje vrijedi $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$ da se mogu odabrati $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ tako da vrijedi

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k z_k \right| \leq 1$$

9. Nad svakom stranicom jednakostraničnog trokuta konstruiramo pravce paralelne stranici trokuta tako da visinu pripadane stranice dijeli na $N \in \mathbb{N}$ jednakih dijelova (skica za $N = 4$ ispod).

Na vrhove novonastalih manjih jednakostraničnih trokuta postavljaju se kraljice. Kraljica napada sve točke na čijim je pravcima (skica ispod, kraljica je Q). Koliko najviše kraljica, da se međusobno ne napadaju, možemo postaviti ovisno o N?



10. Dana je prazna $2020 \times 2020 \times 2020$ kocka te je nacrtana 2020×2020 ploča na svakoj od 6 strana ploče. *Zraka* je $1 \times 1 \times 2020$ kvadar. Nekoliko zraka stavljeno je unutar kocke poštujući sljedeća pravila:

- Dvije strane dimenzija 1×1 svake zrake poklapaju se s jediničnim ćelijama koje leže na suprotnim stranicama kocke. (Dakle, postoji $3 \cdot 2020^2$ mogućih položaja za gredu.)
- Nikoje dvije zrake se ne sijeku u unutrašnjosti
- Unutrašnjosti svake od četiri strane dimenzija 1×2020 svake zrake dodiruju ili stranicu kocke ili unutrašnjost strane druge zrake.

Shortlistani zadatci

Lakši zadatci

1. Pokaži da u bilo kojem konveksnom $2n$-terokutu postoji dijagonala koja nije paralelna s bilo kojom stranicom

2. Marko ima $2n$ kartica ($n \in \mathbb{N}$), po dvije kartice sa svakim od brojeva $1, 2, \ldots, n$. Kada ih je pomiješao i složio jednu do druge u niz, primijetio je da se za svaki k iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ između dviju kartica s brojem k nalazi točno k drugih kartica.
Dokaži da je broj $n^2 + n$ djeljiv s 4.

3. Je li moguće pronaći 24 točke u $\mathbb{R}^3$, nikoje tri kolinearne, i 2019 površina takvih da svaka odabrana površina prolazi kroz tri ili više od odabranih točaka te da svaka trojka odabranih točaka leži na nekoj površini

Umjereno teški zadatci

1. Nalazi se 10001 studenata na fakultetu. Neki studenti se sastanu da naprave klub (student može biti član više klubova). Neki klubovi se povežu u društva (klub može biti u više društava). Ima ukupno k društava.
Pretpostavi da sljedeće tvrdnje vrijede

- Svaki par studenata je u točno jednom klubu
- Za svakog studenta i svako društvo, student je u točno jednom klubu koji pripada društvu.
- Svaki klub ima neparan broj studenata. Nadalje, klub s $2m + 1$ studenata je u točno m društava.

Pronađi sve vrijednosti k.

2. Na šahovskoj ploči dimenzija 8×8 Anka postavlja 25 topova, svakog na jedno polje ploče. Topovi se međusobno napadaju ukoliko se nalaze u istom retku ili stupcu ploče. Može li Eva, kako god Anka postavi topove, uvijek među tim topovima odabrati četiri koja se međusobno ne napadaju.

3. Neka $n > 1$ bude neparan prirodan broj te neka $c_1, c_2, \ldots, c_n$ budu prirodni brojevi. Za svaku permutaciju $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ brojeva $\{1, 2, \ldots, n\}$, definirajmo $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Dokaži da postoje dvije permutacije $a \neq b$ od $\{1, 2, \ldots, n\}$ takvih da je $n!$ djelitelj od $S(a) - S(b)$

Vrlo teški zadatci

1. Dokaži da za sve dovoljno velike prirodne n, među bilo kojih n točaka u površini (dvodimenzionalnom prostoru) možemo pronaći najviše 70 posto šiljastokutnih trokuta. (postoji i jači bound)

2. Neka $n \geq 2$ bude prirodan broj te neka $a_1, a_2, \ldots, a_n$ budu prirodni brojevi. Pokaži da postoje prirodni brojevi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ koji zadovoljavaju sljedeća svojstva:

- $a_q \leq b_i$ za $i = 1.2. \ldots, n$;
- ostatci pri dijeljenju $b_1, b_2, \ldots, b_n$ s n su svi različiti
- $b_1 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$

Koji je najmanji broj zraka koje mogu biti postavljene da zadovoljavaju ove uvjete?

3. Neka $n \geq 4$ igrača sudjeluje na natjecanju u tenisu. Bilo koja dva igrača igraju točno jednu igru te nije moguće imati izjednačenje. Kažemo da je skupina od 4 igrača *loša* ako jedna osoba izgubi od ostale tri te je svaki od ta tri igrača jednu pobijedio jednu od ostale dvije osobe i od druge izgubio. Pretpostavimo da na ovom natjecanju nije bilo loših skupina.
Neka w_i i l_i predstavljaju broj pobjeda i gubitaka za osobu i. Dokaži da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} (w_i - l_i)^3 \geq 0$$

8. Zadaci za šestu grupu

8.1. G6: Lana Milani - G mix

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci za samostalni rad

1. Let ABC be an acute triangle with circumcircle Γ. Let P and Q be points in the half plane defined by BC containing A, such that BP and CQ are tangents to Γ and $PB = BC = CQ$. Let K and L be points on the external bisector of the angle $\angle CAB$, such that $BK = BA, CL = CA$. Let M be the intersection point of the lines PK and QL. Prove that $MK = ML$.

2. Dan je trokut ABC u kojemu je $\angle BCA > 90°$. Opisna kružnica Γ trokuta ABC ima polumjer R. Točka P nalazi se u unutrašnjosti dužine AB tako da je $PB = PC$ i $|PA| = R$. Simetrala dužine PB siječe kružnicu Γ u točkama D i E.

   Dokaži da je točka P središte upisane kružnice trokuta CDE.

3. Let $ABCD$ be a quadrilateral with AB parallel to CD and $AB < CD$. Lines AD and BC intersect at a point P. Point $X \neq C$ on the circumcircle of triangle ABC is such that $PC = PX$. Point $Y \neq D$ on the circumcircle of triangle ABD is such that $PD = PY$. Lines AX and BY intersect at Q. Prove that PQ is parallel to AB.

4. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral such that $AC = BD$ and the sides AB and CD are not parallel. Let P be the intersection point of the diagonals AC and BD. Points E and F lie, respectively, on segments BP and AP such that $PC = PE$ and $PD = PF$. Prove that the circumcircle of the triangle determined by the lines AB, CD and EF is tangent to the circumcircle of the triangle ABP.

5. Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut takav da vrijedi $\angle A = \angle C = \angle E$ i $\angle B = \angle D = \angle F$, a (unutarnje) simetrale kutova $\angle A, \angle C, \angle E$ se sijeku u jednoj točki. Dokaži da se (unutarnje) simetrale kutova $\angle B, \angle D, \angle F$ moraju također sjeći u jednoj točki.

6. Let ABC be an acute-angled triangle in which no two sides have the same length. The reflections of the centroid G and the circumcentre O of ABC in its sides BC, CA, AB are denoted by G_1, G_2, G_3, and O_1, O_2, O_3, respectively. Show that the circumcircles of the triangles G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A and ABC have a common point.

7. In triangle ABC, D, E and F are the points of tangency of incircle with the center of I to BC, CA and AB respectively. Let M be the foot of the perpendicular from D to EF. P is on DM such that $DP = MP$. If H is the orthocenter of BIC, prove that PH bisects EF.

8.2. C6: Maša Dobrić - Kombe nabacane lopatom

Predavanje Hintovi Rješenja

Zadaci

1. Neka je n prirodan broj. U nekoj državi postoji n gradova tako da su svaka dva grada povezana jednom jednosmjernom avionskom linijom. Dokaži da je moguće napraviti put od $n-1$ letova u kojem svaki grad (uključujući onaj iz kojeg smo krenuli) posjećujemo točno jednom.

2. U nekom arhipelagu je n otoka među kojima prometuju dvosmjerne brodske i avionske linije. Između svaka dva otoka postoji točno jedna direktna linija – ili brodska, ili avionska. Kažemo da je arhipelag uredno povezan ako svako kružno turističko putovanje koje počinje i završava na istom otoku koristi paran broj avionskih linija.

   Za koje prirodne brojeve n svaki uredno povezan arhipelag s n otoka ima paran broj avionskih linija?

3. Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana?

4. Neka $n \geq 2$ bude prirodan broj. Dokaži da svi djelitelji od n mogu biti zapisani u niz $d_1, d_2, \ldots, d_k$ tako da za sve $1 \leq i < k$ vrijedi da je jedan od $\frac{d_i}{d_{i+1}}$ i $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ je prost broj.

5. U jednom gradu je M ulica i N trgova, pri čemu su M i N prirodni brojevi takvi da je $M > N$. Svaka ulica povezuje dva trga i ne prolazi kroz druge trgove. Građani žele promijeniti izgled grada. Ove godine svaka će ulica biti po prvi put obojena crveno ili plavo. Dogovoreno je da se svake godine odabere jedan trg, te svim ulicama koje vode do tog trga istovremeno promijeni boja iz plave u crvenu i obratno. Dokaži da građani mogu odabrati boje ulica tako da se nikad u budućnosti ne može dogoditi da sve ulice budu iste boje.

6. Neka je n prirodni broj. Imamo običnu ravnotežnu vagu i n utega čije su težine $2^0, 2^1, \ldots, 2^n$ Na vagu trebamo postaviti sve utege, jednog po jednog, tako da desna strana vage ni u kojem trenutku ne bude teža od lijeve strane. U svakom koraku biramo jedan od utega koji još nisu na vagi i stavljamo ga ili na lijevu, ili na desnu stranu vage, poštujući navedeni uvjet. To ponavljamo dok sve utege ne postavimo na vagu. Odredi na koliko načina to možemo napraviti.

7. Vjeverice Grmko i Skočko su skupile 2021 orah tijekom zime. Skočko je označio orahe brojevima od 1 do 2021, te iskopao 2021 malu rupu ukrug u tlu oko najdražeg stabla. Idućeg jutra Skočko je primijetio da je Grmko stavio po jedan orah u svaku rupu, ali nije obraćao pažnju na brojeve. Skočko je zato odlučio promijeniti raspored oraha nizom od 2021 poteza. U k-tom potezu, Skočko mijenja pozicije dvama orasima susjednima orahu označenom brojem k. Dokaži da postoji broj k takav da u k-tom potezu Skočko mijenja pozicije nekim orasima označenima brojevima a i b takvima da vrijedi $a < k < b$.

8. U nekom arhipelagu nalazi se 2017 otoka nazvanih $1, 2, ..., 2017$. Dvije agencije, Crveni zmaj i Plavo oko, dogovaraju se oko rasporeda brodskih linija između pojedinih otoka. Za svaki par otoka, točno jedna agencija će organizirati brodsku liniju i to samo u smjeru od otoka nazvanog manjim brojem do otoka nazvanog većim brojem. Raspored brodskih linija je dobar ako ne postoje dva otoka s oznakama $A < B$ takva da je s otoka A na otok B moguće doći koristeći samo brodove Crvenog zmaja, a također i koristeći samo brodove Plavog oka. Odredi ukupan broj dobrih rasporeda brodskih linija.

9. Dan je prirodni broj $N > 2$. U skupini od $N(N+1)$ nogometaša nikoja dva nisu iste visine. Ti su nogometaši poredani u red. Trener želi iz reda izbaciti $N(N-1)$ igrača tako da preostalih $2N$ igrača tvori red za koji vrijedi sljedećih N uvjeta:

(1) između dva najviša igrača nema nikoga,

(2) između trećeg i četvrtog igrača po visini nema nikoga,

.

.

.

(N) između dva najniža igrača nema nikoga.

Dokaži da je to uvijek moguće napraviti.

10. Neka je n pozitivan cijeli broj. *Japanski trokut* sastoji se od $1+2+...+n$ krugova posloženih u oblik jednakostraničnog trokuta tako da za svaki $i = 1, 2, ..., n$ vrijedi da i-ti redak sadrži točno i krugova, od kojih je točno jedan obojan u crveno. *Ninja put* u japanskom trokutu je niz od n krugova dobijen kretanjem iz kruga u prvom retku te uzastopnim prelascima iz trenutnog kruga na jedan od dva kruga u idućem retku koji su neposredno ispod trenutnog kruga. Niz završava nakon što dođemo u najdonji redak. U ovisnosti o n, nađi najveći k takav da u svakom japanskom trokutu postoji ninja put koji sadrži barem k crvenih krugova.

11. Anti-Pascalov trokut je tablica u obliku jednakostraničnog trokuta koja se sastoji od brojeva tako da, osim za brojeve u posljednjem retku, vrijedi da je svaki broj jednak apsolutnoj vrijednosti razlike dva broja koji su neposredno ispod njega. Da li postoji anti-Pascalov trokut sa 2018 redaka, koji se sastoji od svih prirodnih brojeva od 1 do $1 + 2 + \cdots + 2018$?

12. Neka je S konačan skup točaka u ravnini koji sadrži barem dvije točke i neka nikoje tri točke skupa S nisu kolinearne. Nazovimo vjetrenjačom postupak određen pravcem l na kojem se nalazi točno jedna točka P skupa S na sljedeći način:

Pravac l rotira se u smjeru kazaljke na satu oko točke P (središta rotacije) do prvog trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa S. Ta točka, nazovimo je Q, postaje novo središte rotacije i pravac dalje rotira u smjeru kazaljke na satu oko točke Q, do sljedećeg trenutka kada na pravcu bude još neka točka skupa S. Postupak se ponavlja beskonačno mnogo puta.

Dokaži da je moguće odabrati središte rotacije $P \in S$ i pravac l koji prolazi kroz P, koji određuju vjetrenjaču u kojoj svaka točka skupa S beskonačno mnogo puta postaje središte rotacije.

13. Let $n \geq 2$ be a positive integer. Paul has a 1 by n^2 rectangular strip consisting of n^2 unit squares, where the ith square is labelled with i for all $1 \leq i \leq n^2$. He wishes to cut the strip into several pieces, where each piece consists of a number of consecutive unit squares, and then translate (without rotating or flipping) the pieces to obtain an n by n square satisfying the following property: if the unit square in the i-th row and j-th column is labelled with $a_{i,j}$, then $a_{i,j} - (i + j - 1)$ is divisible by n. Determine the smallest number of pieces Paul needs to make in order to accomplish this.

14. Neka je $m > 2$ prirodni broj, A konačan skup (ne nužno pozitivnih) cijelih brojeva, te $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ podskupovi skupa A. Ako za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$ zbroj elemenata skupa B_k iznosi m^k, dokaži da A ima barem $\frac{m}{2}$ elemenata.

15. Let n > 2 be an integer. In the plane, there are n segments given in such a way that any two segments have an intersection point in the interior, and no three segments intersect at a single point. Jeff places a snail at one of the endpoints of each of the segments and claps his hands $n-1$ times. Each time when he claps his hands, all the snails move along their own segments and stay at the next intersection points until the next clap. Since there are $n-1$ intersection points on each segment, all snails will reach the furthest intersection points from their starting points after $n-1$ claps.

(a) Prove that if n is odd then Jeff can always place the snails so that no two of them ever occupy the same intersection point.

(b) Prove that if n is even then there must be a moment when some two snails occupy the same intersection point no matter how Jeff places the snails.

16. Dano je $4n$ kamenčića težina $1, 2, 3, ..., 4n$. Svaki kamenčić je obojen jednom od n boja i svakom bojom su obojena točno četiri kamenčića. Dokaži da se kamenčiće može podijeliti u dvije hrpe tako da vrijede oba sljedeća uvjeta:

- Ukupne težine obje hrpe su jednake.
- Svaka hrpa sadrži po dva kamenčića svake boje.

17. Lovac i nevidljivi zec igraju igru u euklidskoj ravnini. Početna točka zeca, A_0, i početna točka lovca, B_0, su iste. Nakon $n-1$ rundi igre, zec je u to£ki A_{n-1}, a lovac u to£ki B_{n-1}. U n-toj rundi, redom se odvija sljedeće:

(i) Zec se neprimjetno premješta u točku A_n tako da je udaljenost između A_{n-1} i A_n točno 1.

(ii) Uređaj za lociranje dojavljuje lovcu točku P_n, garantirajući samo da je udaljenost između P_n i A_n najviše 1.

(iii) Lovac se vidljivo premješta u točku B_n tako da je udaljenost između B_{n-1} i B_n točno 1. Može li lovac uvijek, za bilo koje pomake zeca i za bilo koje točke koje dojavi uređaj za lociranje, birati svoje poteze tako da udaljenost između njega i zeca nakon 10^9 rundi bude najviše 100 ?

18. Neka je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ beskonačan niz prirodnih brojeva, i neka je N prirodan broj. Pretpostavimo da za svaki $n > N$ vrijedi da se broj a_{n-1} pojavljuje točno a_n puta na listi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

Dokaži da barem jedan od nizova $a_1, a_3, a_5, \ldots$ i $a_2, a_4, a_6, \ldots$ postaje periodičan.

(Za beskonačan niz $b_1, b_2, b_3, \ldots$ kažemo da postaje periodičan ako postoje prirodni brojevi p i M takvi da je $b_{m+p} = b_m$ za sve $m \geq M$.)

19. Promatrajmo ploču dimenzije 2025 puta 2025 sastavljenu od jediničnih kvadrata. Matilda želi na ploču postaviti određen broj pravokutnika, ne nužno istih veličina, tako da svaka stranica svakog pravokutnika leži na rubovima jediničnih kvadrata i da je svaki jedinični kvadrat pokriven najviše jednim pravokutnikom. Odredi minimalni broj pravokutnika koje Matilda treba postaviti tako da svaki redak i svaki stupac ploče sadrži točno jedan jedinični kvadrat kojeg ne pokriva ni jedan pravokutnik.

8.3. A6: Adrian Grbac Lacković - Funkcije izvodnice

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Definicija 8.3.1: Funkcija izvodnica

Neka je $(a_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}$, tada red potencija $\sum_{i=0}^{\infty} a_n x^n$ zovemo funkcija izvodnica niza (a_n)

Koeficijenti a_n će nam predstavljati brojeve stvari koje želimo prebrojati (npr. broj podskupova veličine n, particije duljine n...) te ćemo raznim metodama iz algebre odrediti funkciju izvodnicu kako bi došli do njenih koeficijenata.

Primjer 1. Neka je $a_n = 1$, tada je pripadna funkcija izvodnica $\sum_{i=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ za $|x| < 1$

Rješenje 1. Poznata je formula $\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ pa kad uzmemo "limes" $N \to \infty$ desna strana ide u $\frac{1}{1-x}$ □

Napomena 8.3.2

Generalno nas neće zanimati za koje x će formula vrijediti tako da to **možete zanemariti**, ali je bitno da se redovi potencija lijepo ponašaju kod množenja, zbrajanja, deriviranja integriranja...

Funkcije izvodnice su algebarska metoda za rješavanje zadataka iz kombinatorike, kao što ćemo vidjeti u slijedećem primjeru

Primjer 2. Izračunajmo n-ti član Fibonaccijevog niza zadanog s $F_0 = 0, F_1 = 1$ i $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n \geq 2$

Rješenje 2. Neka je $F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$
Sada možemo primjeniti rekurziju i vidjeti što se dogodi,

$$\begin{aligned}
F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + x \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\
&= x + x(F(x) - F_0 x^0) + x^2 F(x) \\
&= x + xF(x) + x^2 F(x)
\end{aligned}$$

primjetimo da možemo izraziti $F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$. Kako bi pronašli formulu za F_n trebamo opet izraziti F kao red potencija.
Koristiti ćemo tehniku zvanu rastav na parcijalne razlomke te formulu iz predhodnog primjera, neka je $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$ (preciznije $\alpha, \beta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$) tada je $\alpha\beta = -1$ i $\alpha - \beta = \sqrt{5}$

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{x}{(1-\alpha x)(1-\beta x)} = \left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right) \frac{1}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha x)^n - (\beta x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) x^n
\end{aligned}$$

i sada zaključujemo da je $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$ □

Zadatak 3. Odredite opći član niza zadanog s $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n$.

Da ponovimo, rješenje se sastojalo od tri djela:

1. definiramo funkciju izvodnicu
2. primjenimo rekurziju kako bi pronašli "closed form" za funkciju
3. ponovo razvijemo funkciju u red

Sada ćemo prolaziti tehnika za 3. dio

Operacije nad redovima

Definicija 8.3.3

Neka je $f(x) = \sum a_n x^n$, tada je $[x^n]f(x) := a_n$ (koeficijent uz x^n u razvoju of f)

Primjer 4. Neka su $A(x), B(x)$ funkcije izvodnice nizova a_n, b_n, pronađimo pripadni niz za funkcije:

1. $cA(x)$
2. $xA(x)$
3. $A(x) + B(x)$
4. $A(x)B(x)$
5. $A'(x)$
6. $\int A(x)dx$

Rješenje 3. Prva tri su očekivano $ca_n, a_{n-1}, a_n + b_n$,
za četvrti trebamo koristiti jedan jaki teorem ali ispadne $\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$,
peti i šesti su $(n+1)a_{n+1}, \frac{a_{n-1}}{n}$ po teoremu ispod $\square$

Teorem 8.3.4: Derivacija i integral

Neka je $f(x) := \sum a_n x^n$, tada je $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ i $\int f(x)dx = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ (unutar radijusa konvergencije od f)

Primjer 5. Pronađite funkciju izvodnicu za niz $a_n = n$

Rješenje 4. Neka je $g(x) = \frac{1}{1-x} = \sum x^n$
Tada je $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (\sum x^n)' = \sum n x^{n-1}$.
Dakle $\sum n x^n = x \sum n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$ $\square$

Primjer 6. Pronađite funkciju izvodnicu za niz $a_n = \frac{1}{n}$

Rješenje 5. Neka je $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \implies f'(x) = \sum x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$
pa je $f(x) = \int_0^x f'(t)dt = -\ln(1-x)$ $\square$

Primjer 7. Pronađite funkciju izvodnicu za niz $1, 0, 1, 0, 1 \dots$

Rješenje 6. Primjetimo da je $\sum a_n x^n = 1 + x^2 + x^4 ... = 1 + (x^2)^1 + (x^2)^2 ... = \frac{1}{1-x^2}$ $\square$

Napomena 8.3.5

Primjetimo da je $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$, ali ta formula vrijedi i za $n \in \mathbb{R}$ gdje je $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$

Primjer 8. Izračunajte:

$$\binom{2026}{0}^2 - \binom{2026}{1}^2 + \dots + (-1)^{2026}\binom{2026}{2026}^2$$

Rješenje 7. Neka je $f(x) = \sum \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$

$$\implies [x^n]f(-x)f(x) = \sum (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum (-1)^k \binom{n}{k}^2$$

dakle odgovr je $[x^n]f(-x)f(x) = [x^n](1-x)^n(1+x)^n = [x^n](1-x^2)^n = (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$ $\square$

Filter korijena iz jedinice

Primjer 9 (motivacijski primjer). Koliko ima podskupova n-članog skupa koji su parne veličine?

Rješenje 8. Neka je $f(x) := (1+x)^n$, tada je $[x^k]f(x)$ broj podskupova duljine k.
Primjetimo da ako zbrojimo $f(1) + f(-1)$, koeficijenti uz neparne potencije od x će se poništiti, a uz parne će se poduplati, znači naš odgovor je $\frac{f(1)+f(-1)}{2}$ $\square$

Predhodni rezultat se može poopćiti

Teorem 8.3.6

Neka je $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ tada je

$$\sum_{d|k} a_k = \frac{\sum_{i=1}^{d} P(\zeta^i)}{d}$$

gdje je $\zeta = e^{i\frac{2\pi}{d}}$ ($d-$ti korijen iz jedinice).

Zadatak 10. Dokažite teorem 1.6

Zadatak 11. Koliko ima podskupova n-članog skupa koji su veličine kongruentne 1 (mod 3)

Primjer 12. Bacamo kocku n puta, koja je vjerojatnost da je zbroj svih bacanja djeljiv s 5?

Rješenje 9. Neka je $f(x) = (x + x^2 + x^3 \dots + x^6)^n$, tada je broj bacanja kojima je zbroj djeljiv s 5 jednak

$$\sum_{5|k} a_k = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} f(\zeta^i) =$$

pošto je za $i \neq 5$

$$f(\zeta^i) = \left(\zeta^i \frac{1-(\zeta^i)^6}{1-\zeta^i}\right)^n = \left(\zeta^i \frac{1-\zeta^i}{1-\zeta^i}\right)^n = \zeta^{in}$$

imamo:

$$\sum_{5|k} a_k = \frac{1}{5}(f(\zeta^5) + \sum_{i=1}^{4} \zeta^{in}) = (f(1) + \sum_{i=1}^{4} \zeta^{in}) \begin{cases} \frac{6^n+4}{5}, & \text{ako } 5|n \\ \frac{6^n-1}{5}, & \text{inače} \end{cases}$$

$\square$

Zadaci

Lakši zadaci

1. Pronađite funkciju izvodnicu za niz $a_n = n^2$

2. Neka je $a_0 = 2, a_1 = 0, a_2 = -2, a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$, odredite funkciju izvodnicu.

3. Dokažimo Vandermondeovu jednakost: $\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$

4. Dokažite:

(a) $\sum \binom{2n}{n} x^n = (1-4x)^{-\frac{1}{2}}$

(b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$

Umjereni zadaci

5. Neka je $S := \{(i,j,k) \in \mathbb{N}^3 : i+j+k = 17\}$. Izračunajte

$$\sum_{(i,j,k)\in S} ijk$$

6. Koliko ima n-znamenkastih brojeva čije su znamenke iz skupa $\{2,3,7,9\}$ koji su djeljivi s 3?

7. David baca novčić 2023 puta, Petar i Lucija bacaju novčić 2024 puta, a Kristijan ga baca 2025 puta. Dokažite da su sljedeće dvije vjerojatnosti jednake, te ih odredite:

(a) Petru je palo točno jedno pismo više nego Luciji

(b) David i Kristijan su dobili jadnaki broj pisama

Teži zadaci

8. Neka je C_n broj validnih načina da napišemo $2n$ zagrada (npr. $n = 3$ imamo: ()()(), (())(), ()(()), ((())) i (()()), ali npr.)()()(nije validan). Izračuunajte C_n.

9. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Izračunajte broj riječi w (konačni nizovi slova) takva da:

- w se sastoji od n slova iz $\{a,b,c,d\}$
- broj slova a je paran
- broj slova b je paran

(Npr. za $n = 2$ postoji 6 takvih riječi: aa , bb , cc , dd , cd i dc .)

10. Neka je p neparan prost broj, koliko ima podskupova skupa $\{1,2,3,\ldots 2p\}$ veličine p čija je suma elemenata djeljiva s p.

11. Za particiju π od n, neka je $A(\pi)$ broj jedinica u π te $B(\pi)$ broj različitih borjeva u π. Npr. za $\pi = (1,1,2,2,3)$ $A(\pi) = 2, B(\pi) = 3$. Dokaži da je suma $A(\pi)$ po svim particijama od n jednaka sumi $B(\pi)$ po svim particijama od n.

8.4. N6: Patrik Cvetek - Polinomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Općenito

Sa K ćemo označavati skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ ili neko polje $\mathbb{F}$.

Definicija 8.4.1: Polinomi

Polinom f s koeficijentima u K je objekt $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ gdje $a_0, \ldots, a_n \in K$. Najveći k takav da $a_k \neq 0$ zovemo stupanj polinoma, označavamo s $\deg f$. Skup polinoma s koeficijentima u K označavamo s $K[X]$.

Napomena

$\deg 0 = -\infty$

Propozicija 8.4.2: Dijeljenje polinoma

Neka su $f, g \in \mathbb{F}[X]$ polinomi , sa $g \neq 0$. Tada postoji unikatni par polinoma $(q, r) \in \mathbb{F}[X]^2$ sa $\deg r < \deg q$ tako da je $f = gq + r$.

Definicija 8.4.3: Djeljivost polinoma

Za polinome $f, g \in K[X]$ kažemo da f dijeli g, pišemo $f \mid g$, ako postoji polinom $h \in K[X]$ tako da je $g = fh$.

Propozicija 8.4.4

Neka je $f \in K[X]$ polinom. Tada $f(\alpha) = 0 \implies X - \alpha \mid f$.

Korolar

Polinom $f \in K[X]$ stupnja $n \geq 0$ ima najviše n nultočaka u K.

Definicija 8.4.5: Ireducibilnost

Polinom $f \in K[X]$ je ireducibilan u K ako ne postoje polinomi $g, h \in K$ pozitivnog stupnja tako da je $f = gh$.

Teorem 8.4.6: Eisensteinov kriterij

Neka je $f = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ polinom te p prost broj koji dijeli $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, te $p \nmid a_n$ i $p^2 \nmid a_0$. Tada je f ireducibilan.

Zadatak 1. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Odredi gcd brojeva $1^n - 1, 2^n - 1, \ldots, n^n - 1$.

Zadatak 2. Neka je p prost broj. Dokaži da je $f = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ ireducibilan.

Važno

Lema 8.4.7: Najvažnija lema o polinomima u $\mathbb{Z}$

Neka je $P \in \mathbb{Z}[x]$. Tada za sve $a, b \in \mathbb{Z}$ vrijedi:

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

Ekvivalentno je sa time da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$a \equiv b \pmod{n} \implies P(a) \equiv P(b) \pmod{n}.$$

Zadatak 3. Pronađite sve polinome W s cjelobrojnim koeficijentima koji zadovoljavaju uvjet da je za svaki prirodan broj n, $2^n - 1$ djeljivo s $W(n)$.

Zadatak 4. Pronađi sve polinome $P(x)$ sa cjelobrojnim koeficijentima tako da je $P(P(n) + n)$ prost broj za beskonačno cijelih brojeva n.

Zadatak 5. Neka je $P \in \mathbb{Z}[X]$ i n neparan broj. Pretpostavi da $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ tako da je $x_2 = P(x_1), x_3 = P(x_2), \ldots, x_1 = P(x_n)$. Dokaži da je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Zadatak 6. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ tako da za sve polinome $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ vrijedi:

- $f(p + 1) = f(p) + 1$,
- Ako $f(p) \neq 0$ onda $f(p) \mid f(p \cdot q)$.

Zadatak 7. Neka je p prost broj, $f \in \mathbb{Z}[X]$ i $\deg f = d$. Ako vrijedi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ i $p \mid f(n)(f(n) - 1)$ za sve $n \in \mathbb{Z}$. Dokaži da je $d \geq p - 1$.

Ako vam je dosadno

Zadatak 8. Označimo s $w(n)$ broj različitih prostih djelitelja od n. Pronađi sve polinome $P \in \mathbb{Z}[X]$, tako da za sve n za koje je $w(n) > 2025^{2025}$ vrijedi da je $P(n) \in \mathbb{N}$ sa

$$w(n) \geq w(P(n)).$$

Zadatak 9. Neka je $P \in \mathbb{Z}[X]$ nekonstantan polinom. Dokaži da ne postoji funkcija $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tako da je broj cijelih brojeva x za koji vrijedi $T^n(x) = x$ jednak $P(n)$ za sve $n \geq 1$.

Zadatak 10. Pronađi sve polinome $f \in \mathbb{N}_0[X]$ tako da

$$\operatorname{rad}(f(n)) \mid \operatorname{rad}(f(n^{\operatorname{rad}(n)}))$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 11. Neka je n prirodan broj. Kažemo da je polinom $P \in \mathbb{Z}$ n-dobar ako postoji polinom $Q \in \mathbb{Z}[X]$ stupnja 2 tako da:

$$n \nmid Q(k)(P(k) + Q(k))$$

za sve $k \in \mathbb{Z}$. Odredi sve n tako da je svaki polinom sa cjelobrojnim koeficijentima n-dobar.

9. Zadaci za MEMO grupu

9.1. G8: Jurica Špoljar - Konfiguracije

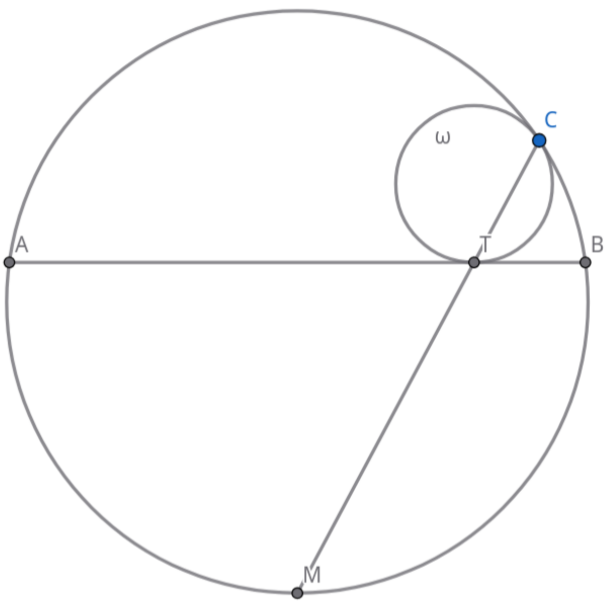
Predavanje Hintovi Rješenja

Teorija only, zadatke dodam po potrebi

Poznavanje konfiguracija u olimpijskoj geometriji (posebice na MEMO-u) može jako ubrzati rješavanje "konfiguracijskih" zadataka. Iz tog razloga konfiguracijski zadaci najčešće ne dolaze na IMO, ali se idalje znaju pojaviti na MEMO-u. Kako god bilo, poznavanje konfiguracija je oružje koje može puno lakše motivirati uvođenje ključnih točaka ili ideju zadatka (iako bi samostalno razmišljanje o zadatku uvijek trebalo biti nužno i dovoljno za njegovo riješavanje).
Za dokaze tvrdnji, rješenja zadataka i motivaciju pratite mentorsko laprdanje na ploči. Ovdje su popisane generalne ideje koje je korisno (ne nužno) znati. Točke se u ovom predavanju definiraju kao na euklidsko najbližoj isprintanoj skici na istom predavanju ili tekstualno i neke se pojavljuju u raznim mjestima tako da ih zapamtite.

Ono kad čudne kružnice

Kružnica u odsječku

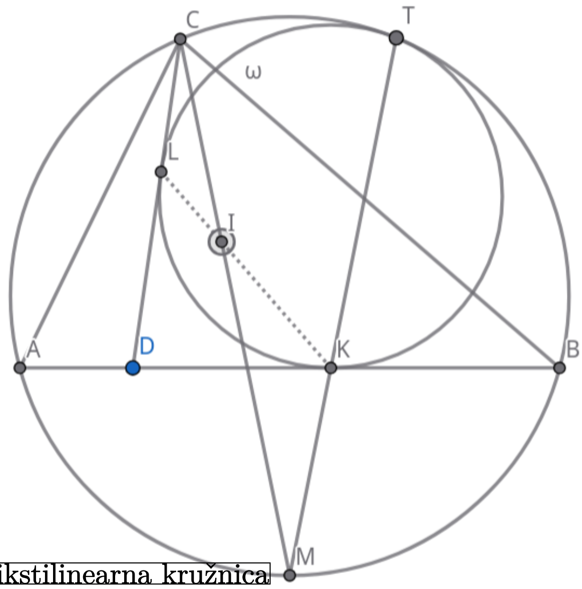


Ova konfiguracija se često javlja u sklopu kompliciranijih struktura i stoga je iznimno korisna.

- CT prolazi kroz polovište luka $\widehat{AB}$ bez C.
- Potencija točke M na ω je $MT \cdot MC = MA^2 = MB^2$

Inverzija iz M radijusa $MA = MB$ fiksira ω i mijenja pravac AB s kružnicom (ABC) i zna dosta puno pomoći u zadacima gdje se ova konfiguracija pojavljuje.

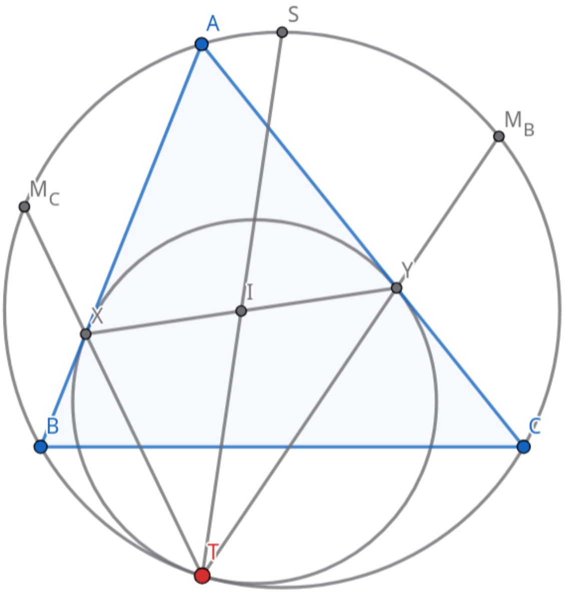
Konfiguracija kurvilinearne kružnice



Kurvilinearna kružnica je jedinstveno određena trokutom i točkom na stranici, u ovom slučaju $\overline{AB}$. Neka je I centar upisane $\triangle ABC$.

- Prepoznaj konfiguraciju kružnice u odsječku
- $CLIT$ tetivan
- $\triangle MKI \sim \triangle MIT$
- L, I, K kolinearne

Mikstilinearna kružnica



Mikstilinearna kružnica je kurvilinearna kružnica gdje je $D = A$ (u prošloj skici) i za razliku od nje, zapravo se pojavljuje, iako idalje rijetko. Neka je S polovište luka $\widehat{BAC}$.

- Prepoznaj konfiguraciju kružnice u odsječku, zaključi da TX i TY prolaze polovištima lukova.

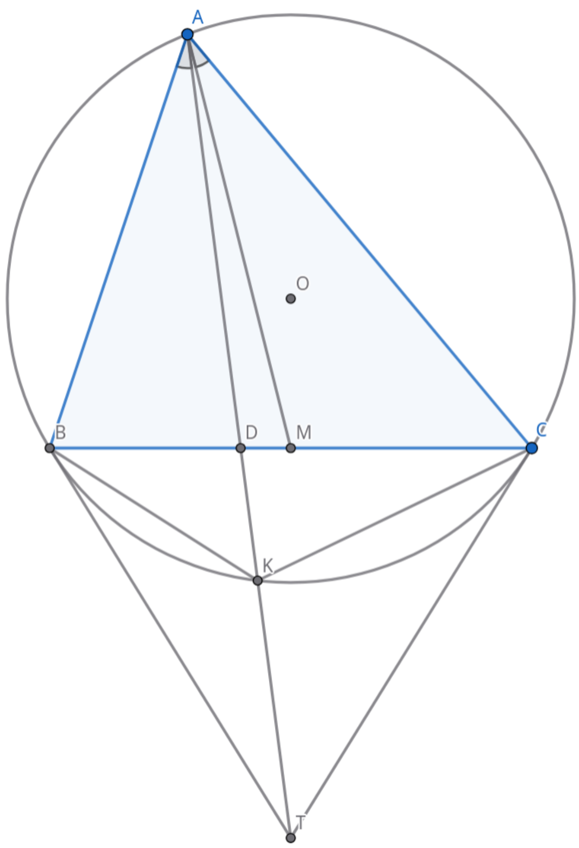
- $BXIT$, $TIYC$ tetivni
- I je polovište $\overline{XY}$
- $\angle BAT = \angle YTI$ i $\angle CAT = \angle XTI$
- Neka je D dirалište upisane s BC, tada $\angle BTA = \angle CTD$
- Neka je E diralište A-pripisane s BC, tada $\angle BAT = \angle CAE$
- Inverzija iz A radijusa AI mijenja upisanu i mikstilinearnu.
- Neka M_A polovište $\widehat{BC}$. Tada TM_A sijece mikstilinearnu u njenoj "najdonjoj tocki" i TS, AE se sijeku u "najgornjoj tocki" mikstilinearne
- (Konstrukcija mikstilinearnog dirališta) T, I, S kolinearno

Sharkydevil

- A-Sharkydevil točka, S, je drugi presjek $(AEIF)$ i (ABC).
- Inverzija oko upisane je korisna, uvjeri se zašto
- Neka je A' antipoda A u (ABC). Neka je P nožiste visine iz D na EF. Dokaži da S, P, I, A' leže na istom pravcu.
- S je centar spiralne sličnosti koja šalje FE u BC. Ta spiralna sličnost radi puno korisnih stvari jer šalje I u M_A (polovište manjeg luka $\widehat{BC}$) i šalje P u D.
- S, D, M_A kolinearno.
- Neka je L polovište $\widehat{BAC}$. LS i EF se sijeku na BC. Neka je ta točka Z
- Neka je P_1 drugi presjek DI s $(AEIF)$. P_1 je na LS.
- Neka je Y presjek AS s EF. Y je D-Ex točka u $\triangle DEF$ (vidi definiciju u ostatku predavanja)
- AS i tangenta na $(AEIF)$ u I se sijeku na BC.
- Neka je I' presjek (BIC) i LI. Onda se tangente na (BIC) u I i I' sijeku na BC. Nadalje, $AIDI'Z$ je tetivan.

Ono kad ortocentar

Simedijana



A-simedijana je preslika težišnice preko simetrale $\angle BAC$.

- A-simedijana prolazi kroz presjek tangenti na (ABC) iz B i C
- $\triangle ABK \sim \triangle AMC$ i $\triangle ABM \sim \triangle AKC$
- $(AK, BC) = -1$, stoga je KA i K-simedijana $\triangle BKC$
- $\frac{BK}{CK} = \frac{AB}{AC}$ i $\frac{BD}{DC} = (\frac{AB}{AC})^2$
- Neka je L polovište $\overline{AK}$, tada je $BLCT$ tetivan

- BC je unutarnja a MT vanjska simetrala $\angle AMK$
- (*) Neka je N nožište okomice iz A na BC, tada su $NE \cap MM_C$ i $NF \cap MM_B$ na A-simedijani. M_B, M_C *su redom polovišta* $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$

$\boxed{\text{Humpty/Que/Ex}}$

D,E,F su nožišta visina iz A, B, C redom.
A-Ex točka X_A je presjek EF i BC. A-Humpty točka, H_A je projekcija ortocentra na A-težišnicu.
A-Queue točka je presjek (ABC) i (AH).

- AQ_A prolazi kroz X_A.
- Preslike H_A preko BC i polovišta $\overline{BC}$ leže na ABC. Posebno, preslika preko BC je K.
- AH_A je A-simedijana u $\triangle AEF$.
- H je ortocentar $\triangle AX_AM$
- (Još jedna konstrukcija H_A) H_A je drugi presjek (AEF) i (AHB)
- Q_A je na HM
- $KH'EF$, Q_ANH_AD i $H'HH_AK$ su tetivni (H' je preslika ortocentra preko BC)
- (BH_AA) i (CH_AA) diraju BC u B i C redom.
- Q_A je centar spiralne sličnosti koja slika FE na BC.
- Q_A je H-Humpty točka u $\triangle HBC$. (Sva svojstva se prenose i na to... ludo)

$\boxed{\text{Dumpty}}$

- Neka je K drugi presjek A-simedijane i (ABC). Dumpty točka, označeno s D_A je polovište $\overline{AK}$.
- (Klasična Dumpty definicija) D_A je drugi presjek (AO) i (BOC).
- Bitno: D_A je centar spiralne sličnosti koja šalje $\overline{BA}$ u $\overline{AC}$
- D_A je izogonalna konjugata H_A.
- Kružnica koja prolazi kroz A i D_A i tangentna je na (BOC) ima centar na visini iz A na $\overline{BC}$.

9.2. C8: Emanuel Bajamić - Poseti

Predavanje Hintovi Rješenja

Kratki uvod

Definicija 9.2.1: Parcijalno uređen skup (Poset)

Par skupa S i binarne relacije $\leq$ na S je parcijalno uređen skup (ili poset) ako:

- $x \leq x$ za svaki $x \in S$, te ne vrijedi $x \leq y$ i $y \leq x$ za različite $x, y \in S$.
- $x \leq y$ i $y \leq z$ implicira $x \leq z$,
- nema ciklusa (osim petlji) u usmjerenom grafu s vrhovima S i bridovima $x- > y$ kad god $x \leq y$.

Primjer 1. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa relacijom $\leq$ je poset. Skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ sa relacijom $|$ ($a \mid b$ znači a dijeli b) je također poset.

Primjer 2. Za skup S, skup $\mathcal{P}(S)$ je poset s relacijon $\subseteq$.

Definicija 9.2.2: Lanac

Lanac u posetu $(S, \leq)$ je skup $C \subseteq S$ takav da za svaki $x, y \in C$, ili $x \leq y$ ili $y \leq x$.

Primjer 3. Za poset svih podskupa $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ s relacijom $\subseteq$, skup $\{\emptyset, \{4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 4, 5\}\}$ je lanac.

Primjer 4. Za drugi poset iz Primjera 1. skup $\{p^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ je lanac, za fiksni p.

Definicija 9.2.3: Antilanac

Antianac u posetu $(S, \leq)$ je skup $A \subseteq S$ takav da za svaki $x, y \in A$, niti $x \leq y$ niti $y \leq x$.

Primjer 5. Za poset $\mathcal{P}(S)$ svih podskupova skupa od $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ s relacijom $\subseteq$, skup

$$\binom{S}{2} = \{\{x, y\} \mid x, y \in S, x \neq y\}$$

veličine $\binom{n}{2}$ je antilanac.

Lema 9.2.4

U posetu, lanac i antilanac se sijeku u najviše jednom elementu.

Dokaz. Slijedi iz definicije lanca i antilanca. $\square$

Teorem 9.2.5: Mirsky

U svakom konačnom posetu, maksimalna veličina lanca jednaka je minimalnom broju antilanaca čija unija pokriva poset.

Teorem 9.2.6: Dilworth

U svakom posetu, maksimalna veličina antilanca jednaka je minimalnom broju lanaca čija unija pokriva poset.

1. Dokaži Mirskyjev teorem.

2. Dan je prirodni broj $n > 1$. Na planini postoji n^2 postaja koje su sve na međusobno različitim visinama. Svaka od dvije kompanije koje upravljaju žičarama, A i B, posjeduje k žičara; svaka žičara omogućuje prijevoz od jedne postaje do druge koja je na većoj visini (bez međupostaja). Svih k žičara kompanije A imaju k različitih početnih postaja i k različitih završnih postaja, pri čemu žičara koja počinje na većoj visini i završava na većoj visini. Isti uvjet vrijedi za kompaniju B. Kažemo da kompanija povezuje dvije postaje ako je moguće iz niže doseći višu koristeći jednu ili više žičara te kompanije (druga kretanja između postaja nisu dozvoljena). Odredi najmanji prirodni broj k za koji sigurno postoje dvije postaje koje povezuju obje kompanije.

3. Postoji $n^2 + 1$ zatvoren interval na realnom pravcu. Dokaži da među tim intervalima ili postoji $n+1$ interval tako da se nikoja dva ne sijeku ili postoji $n+1$ intervala koji se svi sijeku u barem jednoj točki.

4. Dan je $n \in N$. Neka su $a_1 < ... < a_n$ prirodni brojevi. Odredi najveci $k = f(n)$ t.d. vrijedi barem jedna tvrdnja:

   1)postoji k-člani skup $K \subseteq \{1, ..., n\}$ t.d. za sve $i, j \in K$ vrijedi $a_i \mid a_j$ ili $a_j \mid a_i$,

   2)postoji k-člani skup $K \subseteq \{1, ..., n\}$ t.d. za sve $i, j \in K$ niti $a_i \mid a_j$ niti $a_j \mid a_i$.

5. (Erdos-Szekeres) Svaki niz koji ima $ab + 1$ elemenata sadrži rastući podniz duljine $a + 1$ ili padajući podniz duljine $b + 1$.

6. Dokaži Dilworthov teorem.

7. Promatrajmo ploču dimenzije 2025 puta 2025 sastavljenu od jediničnih kvadrata. Matilda želi na ploču postaviti određen broj pravokutnika, ne nužno istih veličina, tako da svaka stranica svakog pravokutnika leži na rubovima jediničnih kvadrata i da je svaki jedinični kvadrat pokriven najviše jednim pravokutnikom. Odredi minimalni broj pravokutnika koje Matilda treba postaviti tako da svaki redak i svaki stupac ploče sadrži točno jedan jedinični kvadrat kojeg ne pokriva ni jedan pravokutnik.

9.3. A: Karlo Jokoš - Idejaste funkcijske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Uvod

Funkcijske jednadžbe najpredvidljivija je tema koja se može pojaviti na matematičkom natjecanju. Lagane funkcijske jednadžbe mogu se ubiti jednostavnim uvrštavanjem i uvrštavanjem toga što smo dobili (ovakav zadatak možemo očekivati kao P1 na individualnoj MEMO razini). Međutim, zahtjevne (*idejaste*) funkcijske jednadžbe zahtjevaju više od običnog uvrštavanja, tj. imaju neki nestandardni korak karakterističan baš za tu funkcijsku jednadžbu (ovdje spadaju MEMO P3/P4).

Riješeni primjeri

Primjer 1. Riješi preko pozitivnih realnih brojeva sljedeću funkcijsku jednadžbu

$$f\left(f(x)y + \frac{x}{y}\right) = xyf(x^2+y^2)$$

Rješenje 1. Jedino rješenje je $f(x) = \frac{1}{x}$.
Ideja rješenja je da želimo da izjednačimo stvari unutar funkcija, odnosno, želimo da

$$f(x)y + \frac{x}{y} = x^2 + y^2$$

Fiksirajmo neku vrijednost od x. Primijetimo da lijeva strana jednadžbe postaje ogromna kada $y \to 0$ te da desna strana jednadžbe postaje ogromna kada $y \to \infty$. Budući da su $c_1 y + \frac{c_2}{y}$ i $c_3 + y^2$ sve neprekidne funkcije za konstante c_1, c_2, c_3, znači da mora postojat y takav da gornja jednadžba vrijedi. Ovo nam daje $xy = 1$ te uvrštavanjem toga u $f(x)y + \frac{x}{y} = x^2 + y^2$ dobivamo

$$\frac{f(x)}{x} + x^2 = x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^2$$

odnosno, dobili smo $f(x) = 1/x$. $\square$

> **Napomena**
>
> Jako cool stvar u vezi ovog rješenja je što smo uzeli jednu od najprirodnijih ideja u funkcijskim jednadžbama (napravi da se ono unutar f pokrati) i doveli je do njenog maksimuma.

Primjer 2. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ takve da vrijedi

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

za sve racionalne x i y.

Rješenje 2. Isprobavanjem linearnih i konstantnih funkcija, uočavamo da su vjerojatno jedina rješenja $f(x) = x$ i $f(x) = -x$ $\square$

Primijetimo da za $P(x, y + xf(x))$ imamo

$$f((y + xf(x)) + xf(x)) = f(y + xf(x)) + x^2 = f(y) + 2x^2$$

Generalno indukcijom možemo primijetiti da vrijedi

$$f(mxf(x) + y) = f(y) + mx^2$$

za $m \in \mathbb{N}$. Uočimo lijepu činjenicu da nam se m kod x^2 ponaša linearno, želimo to iskoristiti.

Uzmimo m, n, a, b tekve da vrijedi

$$\frac{n}{m} = \frac{af(a)}{bf(b)}$$

odnosno $y+nbf(b) = y+maf(a)$ (ne možemo imat $f(b) = 0$ bez $b = 0$, to se lako pokaže supstitucijom $P(x, 0)$), to nam daje

$$f(y) + ma^2 = f(y + maf(a)) = f(y + nbf(b)) = f(y) + nb^2$$

odnosno

$$\frac{n}{m} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{af(a)}{bf(b)}$$

Odnosno

$$f(a)/a = f(b)/b$$

Što nam daje linearnost od f, a samim time i rješenje.

Napomena

Ovaj zadatak jako lijepo reprezentira kako možemo iskoristiti domenu Q na kreativan način (iako domena Q obično znači da se funkcijska jednadžba svodi na Cauchy nakon čega zadatak umre).

Primjer 3. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ sa svojstvom da

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

vrijedi za sve $x, y \in \mathbb{Z}$.

Rješenje 3. Isprobavanjem linearnih i konstantnih funkcija vidimo da bi odgovor trebao biti $f(x) = x + 1$ i $f(x) = -1$.

Započnimo s uvrštavanjem. Vidimo da nam je $P(x, f(x))$ zgodan jer nam daje

$$f(x - f(f(x)) = -1$$

odnosno znamo da za neki a mora vrijediti da je $f(a) = -1$. Uvrštavanjem $P(x, a)$ dobivamo

$$f(x + 1) = f(f(x))$$

te s tim identitetom možemo pretvoriti početnu jednadžbu u

$$f(x - f(y)) = f(x + 1) - (f(y) + 1)$$

Odnosno

$$f((x + 1) - (f(y) + 1)) = f(x + 1) - (f(y) + 1)$$

Odnosno

$$f(x - (f(y) + 1)) = f(x) - (f(y) + 1)$$

Promotrimo skup vrijednosti koje poprima izraz $f(y) + 1$, neka taj skup bude S:

$$S := \{f(y) + 1 \mid y \in \mathbb{Z}\}$$

te neka s bude neki element tog skupa (znamo da je -1 jedan od elemenata toga skupa). Mi dakle imamo

$$f(x - s) = f(x) - s$$

za sve $s \in S$.

Promotrimo sada zašto je pozicija u kojoj se sada nalazimo dosta dobra. Recimo da imamo $s = 5$ (znači imamo $f(x-5) = f(x) - 5$), tada možemo umjesto x ubaciti $x - 5$ i dobiti $f(x-10) = f(x-5) - 5 = f(x) - 10$, odnosno, dobili smo da $10 \in S$. Ponavljanjem toga i u pozitivnu stranu i u negativnu, dobili smo da svi višekratnici od $5 \in S$.

Generalno, ako imamo neki $a \in S$ onda imamo i sve višekratnike od $ka \in S$ za $k \in \mathbb{Z}$. Ako bismo imali i neki $b \in S$ takav da $\gcd(a, b) = d$, može se pokazati da bi onda mogli postići da svi $kd \in S$ za $k \in \mathbb{Z}$. Pogledavši na naša rješenja, jedno rješenje je konstanta, a drugo podrazumijeva surjekciju u $\mathbb{Z}$ (linearno rješenje). Ovo otkriće o elementima s i kako možemo konstruirati da nam se slika od f sastoji od višekratnika nekog d (ne mora nužno biti d, elementi mogu imati i formu $kd + c$ za $c < d$) nam daje odličnu priliku da izganjamo neku kontradikciju. U skraćenom ćemo obliku ovo zapisati $S = m\mathbb{Z}$ te to reprezentira da u S imamo svaki m-ti element.

Razbijmo zada zadatak na 3 slučaja:

- Prvi slučaj, $m = 0$, to znaći da je u S samo -1, prema tome, $f(x) = -1$ je jedno rješenje.
- Drugi slučaj, $m = 1$, to znaći da je f surjektivan. Sada za $f(x-s) = f(x) - s$ možemo praktički reći da je s neka varijable (jer može biti bilo što), pa možemo jednadžbu i zapisati kao

  $$f(x-y) = f(x) - y$$

  Te sada pri uvrštavanju $x = 0$ dobivamo

  $$f(x) = x + C$$

  za neku konstantu C za koju pri uvrštavanju u početnu jednadžbu dobivamo $+1$.
- Treći slučaj, $m > 1$. Sada imamo rupe u slici od f (u slici je svaki m-ti element). Također, budući da znamo da $-1 \in S$, možemo zaključiti da $f(x) \equiv -1 \pmod{m}$. Uzmimo sada neke a i b takve da $a \equiv 0 \pmod{m}$ i $b \equiv 1 \pmod{m}$ te $f(a) = f(b)$. (ovo doista možemo napraviti. Ako krenemo s nekim a i b za koje vrijedi $f(a) \neq f(b)$, onda možemo dodavanjem i oduzimanjem elemenata is s postići da budu jednaki jer oni ne mijenjaju ostatak pri dijeljenju a i b s m). Sada imamo:

  $$f(a+1) = f(f(a)) = f(f(b)) = f(b+1)$$

  Nadalje dobivamo $f(a+2) = f(b+2)$ i tako dalje. Odnosno, za dovoljno velike x imamo $f(x) = f(x+l)$ pri čemu $l = \mid b - a \mid \equiv \pm 1 \pmod{m}$. Onda

  $$f(x) = f(x+ml) = f(x) + ml \iff ml = 0$$

  Kontradikcija.

$\square$

Napomena

Ovaj zadatak je bio rješiv i bez definiranja skupa S koristeći samo supstitucije. Međutim, htio sam istaknuti ovo rješenje jer proizlazi sasvim prirodno (i jer sam htio sačuvati zadatke koji ne mogu bez definiranja skupa za zadatke ispod). Pronašli smo jaku stvar ('periodičnost' koju nam je stvorilo promatranje slike $f(y) + 1$) i znali smo da je jedini period ili 0 ili 1, prema tome, znali smo da generalno moramo dobiti kontradikciju. To je generalna ideja kod idejastih funkcijskih jednadžbi, ako nam jednadžba govori nešto s čime se naš skup rješenja ne slaže, upravo to treba izganjat jer će nam nerijetko dati kontradikciju.

Zadaci

Pocrtao sam crvenom bojom zadatke koji su mi bili posebno lijepi.

1. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ za koje vrijedi

$$f(x) + f(y) + 2xy = f(x + y)$$

za sve nenegativne realne x i y.

2. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ su nenegativni realni brojevi) koje zadovoljavaju

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy)$$

3. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$f^{f^{f(x)}(y)}(z) = x + y + z + 1$$

za sve $x, y, z \in \mathbb{N}$

4. Pronađi sve neprekidne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = xy(x + y)$$

za sve $x, y \in R$.

5. Riješi funkcijsku jednadžbu u $\mathbb{Z}$

$$2f(f(n)) = 5f(n) - 2n$$

6. Pronađi sve surjektivne funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(xf(y) + y^2) = f((x + y)^2) - xf(x)$$

za sve realne x i y.

7. Pronađi sve neprekidne funkcije $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ takve da

$$f\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) = f(x) + f(y)$$

8. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ za koje vrijedi

$$f(2x + f(y)) + f(f(2x)) = y.$$

za sve cjelobrojne x i y

9. Neka $f : R \to R$ bude aditivna funkcija za koju vrijedi $f(1) = 1$ i

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

za sve $x \neq 1$. Dokaži da $f(x) = x$.

10. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(2n + 1) = f(2n) + 1 = 3f(n) + 1$$

za sve $n \in \mathbb{N}$

11. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$xf(x) - yf(y) = (x - y)f(x + y)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$

12. Pronađi sve strogo rastuće funkcije f koje idu iz nenegativnih cijelih brojeva u cijele brojeve te zadovoljavaju $f(2) = 7$ i

$$f(mn) = f(m) + f(n) + f(m)f(n)$$

za sve nenegativne cijele m i n.

13. Neka $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bude funkcija takva da

$$f(x + y) = f\left(\frac{x + y}{xy}\right) + f(xy)$$

za sve $x, y > 0$. Dokaži da $f(xy) = f(x) + f(y)$ za sve $x, y > 0$.

14. Neka $f : R \to R$ bude aditivna funkcija za koju vrijedi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$$

za sve $x \neq 0$. Dokaži da $f(x) = cx$ za $c \in \mathbb{R}$.

15. Dokaži da ako za dvije funkcije $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(g(n)) = f(n) + 1 \quad \text{i} \quad g(f(n)) = g(n) + 1$$

za sve prirodne n, onda $f = g$.

16. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ za koje vrijedi

$$f(x + y) + f(xy) = f(x)f(y) + 1$$

za sve $x, y \in R$

17. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da

$$f(x)f(yf(x) - 1) = x^2 f(y) - f(x)$$

za sve realne x i y. (Tko riješi ovaj zadatak je apsolutno slobodan s ovog predavanja, respect).

9.4. N8: Patrik Cvetek - Bi$\mathbb{N}$go

Predavanje Hintovi Rješenja

Niz je definiran : $a_1 = 1$, a_n je najmanji broj veći od a_{n-1} i relativno prost s barem pola elemenata skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Dali postoji neparan broj koji nije u nizu?	Nađi sve neomeđene funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da $f(n+f(m)-1)$ dijeli $f(n)+m-1$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$	Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p, q > n$ neparni prosti. Dokaži da brojeve $1, 2, \dots, n$ moš obojat u dvije boje tako da za sve $x \neq y$ iste boje, $xy-1$ nije djeljiv s p i q.	M je prikazan kao umnožak prostih. Svakom prostom dodaj 1 i nazovi taj umnožak s N. M dijeli N. Dokaži ako N prikažemo kao umnožak prostih i svakom dodamo 1 da će taj broj bit djeljiv s N.	Neka je $p(n)$ broj različitih prostih djelitelja od n. Dokaži da je skup prirodnih rješenja $n \leq (p(n))^k$ konačan za sve $k \in \mathbb{N}$
Dokaži da postoje $a, b > 1$ sa $\gcd(a,b) = 1$ i $rad(ab(a+b)) < \frac{a+b}{2025}$.	Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $P(x) = x^n + n$. Jeli za neki neparan/paran n moguće da je $P(x)$ složen za sve $x \in \mathbb{N}$	Neka je $f(x)$ ne konstantan polinom. $m \in \mathbb{N}$ je $fora$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je : $f[divs(m)] = divs(n)$. Dokaži da ima konačno $fora$ brojeva.	Dokaži da postoji K tako da za sve proste $p > K$ broj prirodnih brojeva $a \leq p$ za koje $p^2 \mid a^{p-1} - 1$ je manji od $\frac{p}{2^{2025}}$	$n \in \mathbb{N}$, $S_n = \{a \mid \gcd(a,n) = 1, a \leq n\}$. $f(n)$ je najmanji broj tako da možemo podijelit S_n u $f(n)$ disjunktnih podskupova svaki tvori aritmetički niz. Postoji beskonačno (a,b) , $a, b > 2025$, $a \mid b$, $f(a) \nmid f(b)$
Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{s_2(3i)} > 0.$	Neka je $n \in \mathbb{N}$, i p prost broj. Dokaži da: $p^p \mid n! \implies p^{p+1} \mid n!$	Neke je $k \in \mathbb{N}$. Niz $a_1, a_2, \cdots$ je kul ako vrijedi: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lvert\{a_1, \dots, a_{n+k}\}\rvert$. Odredi broj kul nizova.	Nek je n umnožak 2025 različitih prostih brojeva. Nađi broj prirodnih rješenja: $n + \gcd(n,k) = k.$	Neka je p_i i-ti prost broj i $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$. Dokaži da u nizu $1, \dots, N$ postoji točno $\frac{N}{2}$ brojeva koji su djeljivi s neparno mnogo prostih $p_i, i \leq k$.
Za $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ definiramo $sig(n) = \sum \alpha_i$. Dokaži da postoje 2025 uzastopnih brojeva od kojih za točno 45 vrijedi $sig(n) < 10$.	Odredi sve $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ za koje postoji n brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n_{\geq 2}$ tako da za sve $i \neq j$ vrijedi: $a_i \mid a_j^2 + 1.$	Odredi sve permutacije $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ brojeva $1, 2, \dots, 2025$ tako da $j - i \mid a_j - a_i$.	Nek su a, b, c cijeli brojevi i da vrijedi: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$ Dokaži da je abc kub.	Odredi sve parove prostih (p,q) za koje: $2^p = 2^{q-2} + q!.$
Odredi sve $n \in \mathbb{N}$, tako da: $\sigma(n) = \tau(n) \lceil \sqrt{n} \rceil.$	Za $n \in \mathbb{N}$, nek je $\alpha(n)$ aritmetička sredina djelitelja od n, i $\beta(n)$ aritmetička sredina svih $k \leq n, gcd(k,n) = 1$. Odredi sve rješenja od $\alpha(n) = \beta(n)$.	Neka je $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $a-b$ djeljiv s k ako i samo ako $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\lfloor an \rfloor \equiv \lfloor bn \rfloor \pmod{k}.$	Za $n, k \in \mathbb{N}$, kažemo n je kul ako postoje $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0^k$ tako da: $n = a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + \cdots + a_k^{2^k}$. Dali postoji k tako da su svi brojevi kul.	Dokaži $\forall n, x^n \equiv y^n \pmod{n}$ implicira $x = y$. Za koje parove (a,b) postoje beskonačno n tako da $a^n \equiv b^n \pmod{n}$.

II. Hintovi s predavanja

10. Hintovi za prvu grupu

10.1. G1: Mislav Plavac - Sličnost i sukladnost

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. SKS poučak o sukladnosti.
2. KK poučak o sličnosti.
3. KK poučak o sličnosti.
4. KK poučak o sličnosti.
5. SKS poučak o sličnosti.
6. Sukladnost trokuta
7. Sličnost trokuta ABD, ACD i ABC.
8. Dovoljno je pokazati da su vrhovi P, Q, M, N pravi te da su dvije susjedne stranice jednake duljine.
9. KSK poučak o sukladnosti.
10. Povuče se simetrala kuta i gleda sličnost.
11. SKS poučak o sukladnosti.
12. Povucite pravac AD i BC do njihovog sjecišta Q te označite polovišta L i N.

Teži zadaci

13. Produžite pravac AC preko točke C i pravac SD preko točke D.
14. SSK poučak o sukladnosti.
15. Produžite pravac BC preko točke C.
16. KK poučak o sličnosti.
17. Uoči sličnost trokuta ΔBFG i ΔBCN te trokuta ΔADE i ΔAMC.

10.2. C1: Ivan Premuš - Dirichletov princip

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Ostaci pri dijeljnju s 14.
2. Promatraj 15 zbrojeva $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + \cdots + a_{15}$.
3. Jaka forma Dirichletovog principa.
4. Što ako postoji osoba koja se rukovala sa svima? A ako ne postoji?
5. Kako bismo mogli dobiti "kutije" u koje možemo smještati komarce? Probajte nekako smisleno podijeliti kvadrat.
6. Koji su mogući zbrojevi u svakom retku/stupcu/dijagonali?
7. Koje su koordinate polovišta?
8. Fiksiraj jednu osobu. Što možeš reći o broju osoba koja ta osoba poznaje ili ne poznaje? Što možeš reći o poznanstvima tih ljudi? Probajte zadatak nekako skicirati.
9. Koje sve kombinacije točaka možemo smjestiti u 1 stupac?
10. Pretpostavite suprotno.
11. Faktorizirajte.
12. Među kojim poljima svaki pojedini triomino može pokriti najviše jedno?
13. Koja podjela plavih kuglica bi mogla predstavljati "kutije"?
14.
    - Promatrajte ostatke pri dijeljenju brojeva $1, 11, 111, \ldots$ sa n.
    - Probajte iskoristiti prethodni zadatak.
15. Sjetite se prethodnih zadataka. Kako biste konstruirali dovoljno brojeva kako biste mogli primijeniti DP?
16. S obzirom na raspored točki odredite dva moguća slučaja.
17. Pokažite da je odgovor $n(n + 1)$.
18. Promotrite sjecišta zadanih pravaca s dužinama, paralelnim sa stranicama kvadrata, koje dijele kvadat na dva dijela s površinama u omjeru $2 : 3$.
19. Počnite od pretpostavke da k djece ima zajedničke djedove A i B.
20. Podijelite tablicu na manje kvadratiće. Koliko i kakvih brojeva može biti u tim kvadratićima?
21. Promatrajte razlike $a_{20} - a_{19}, \ldots, a_2 - a_1$.
22. Kada točke tvore pravokutnik? Kako biste mogli podijeliti točke u "kutiije" iz kojih onda ne smijete odabrati one koje bi činile pravokutnik?

10.3. A1: Antonia Čović Kaćunić - Jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Koristite formulu za razliku kvadrata i formulu za aritmetičku sredinu, postavite sustav od dvije jednadžbe s dvije nepoznanice.

2. Neparne brojeve zapišite u obliku $x = 2k+1, y = 2l+1$ za $k, l \in \mathbb{N}_{\nvdash}$ proizvoljne. Zatim iskoristite formulu za razliku kvadrata

3. Tri uzastopna prirodna broja možete zapisati u obliku $n-1, n, n+1$. Iskoristite formulu za kub razlike/zbroja. Gledajte slučajeve: 1°) $n = 3k, k \in \mathbb{N}_{\nvdash}$ tj. n djeljiv s 3; 2°) $n = 3k+1, \mathbb{N}_{\nvdash}$; 3°) $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}_{\nvdash}$.

4. Proširite prvi razlomak (umanjenik) s b, a drugi razlomak (umanjitelj) s a tj. svedite lijevi dio jednakosti na zajednički nazivnik. Riješite se razlomaka (unakrsnim množenjem) i novodobivenoj jednadžbi dodajte i oduzmite 25. Zatim, grupirajte pribrojnike i izlučite zajednički faktor.

5. Primijenite Hornerov algoritam.

6. Faktoriziraj razliku kvadrata i raspiši 2023 kao umnožak prostih faktora, sada rastavi zadatak na slučajeve.

7. Kvadriranjem $x+y$ možemo otkriti koliko je xy, što dobijemo kvadriranjem x^2+y^2?

8. Iskoristite formulu za razliku kvadrata. Zbrojite sve tri jednadžbe i nađite xy. Vratite se u početne jednadžbe i postavite sustav od tri jednadžbe i tri nepoznanice.

9. dodaj i odumi $4b^2$.

10. Označite broj članova obitelji s n, količinu kave koju je jedan član natočio s k, a količinu mlijeka s m. Znate da $k+m = 1.8$. Ako jedan član ulije $\frac{1}{8}$ ukupne kave i $\frac{1}{5}$ ukupnog mlijeka, formirajte jednadžbu
$$8k + 5m = 1.8n$$
i izrazite k i m preko n. Zatim koristite uvjete $k > 0$ i $m > 0$ da ograničite moguće vrijednosti n.

11. Faktoriziraj dani izraz. Jedan od izraza $n, n-m, n+m$ mora bit djeljiv s 3, zašto?

12. Neka $\frac{a}{b}$ bude početni broj, nakon izvršenja dijela zadatka s postotcima dobivamo $\frac{0.92a}{1.08b}$, dalje sami!

13. Pogledaj ostatke pri djeljenju s 4.

14. Zapiši kao sustav jednadžbi, riješi se ružnih razlomaka i pozbrajaj sve jednadžbe.

15. Ako bismo zapisali $\frac{5n^2-9}{2n+6} = a$, tada
$$4a = \frac{20n^2-36}{2n+6} = \frac{20n^2-36-5(2n+6)^2+5(2n+6)^2}{2n+6} = \frac{-36-120n-180}{2n+6} + 5(2n+6)$$
Zašto nam ovo pomaže?

10.4. N1: Gabriel Čajsa - Znamenke

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. $1000a + 100b + 10c + d = 343d + 49c + 7b + a \implies 999a + 93b = 342d + 39c$
2. Ideja je ograničiti broj znamenaka u broju.
3. Uzmi da je baza x, onda brojeve možemo zapisati kao
$$1 + x^2 + \cdots + x^{3n}$$
gdje je n prirodan broj.
4. Ideja je zapisati ovaj broj na pametan način: možemo ga zapisati kao $(10^{100} - a)^2$ gdje je a neki prirodan broj.
5. Ideja je ovu tvrdnju dokazati indukcijom. Odnosno, cilj je dokazati da bilo koji broj koji se sastoji od 3^n jedinica mora biti djeljiv s 3^n.
6. Neka x bude broj koji se sastoji od n jedinica. Tada izraz $A+2B+4$ postaje $4x(10^n+1)+16x+4$, s čime je puno lakše baratati.
7. Dekadski zapis od $a = \overline{a_x a_{x-1} \ldots a_0}$ i od $b = \overline{b_y b_{y-1} \ldots b_0} = a_x + a_{x-1} + \cdots + a_0$ onda je $c = b_y + b_{y-1} + \cdots + b_0$, x i y su nenegativni cijeli brojevi ($x \geq y$), imamo:
$$a \equiv a_x 10^x + a_{x-1} 10^{x-1} + \cdots + a_0 \equiv a_x + a_{x-1} + \cdots + a_0 \equiv b \equiv \overline{b_y b_{y-1} \ldots b_0} \pmod 9$$
8. Ideja je nekako zapisati te brojeve. Primijetimo da se bilo koji broj koji zadovoljava da se sastoji oed jedne sedmice i od jedne jedinice može zapisati u ovom obliku:
$$\frac{10^{2006} - 1}{9} + 6 * 10^n$$
Sada je još samo cilj pronaći dovoljno n-ova (odnosno njih 666), tako da dokažemo tvrdnju zadatka.
9. Indukcijom možemo 'micati' nule s kraja broja (zašto?) i postići da broj ima oblik
$$\overline{a00\ldots0b}$$
pri čemu je ili $a = 3$ ili $b = 3$. Međutim, nije moguće da $b = 3$ (zašto?), dakle $a = 3$.

10.5. X1: Artur Garifullin - A ka logika

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. izradite tablicu istinitosti
2. izradite tablicu istinitosti
3. Dokažite dva smjera tj ako se dijagonale četverokuta raspolavljaju tada je četverokut paralelogram. Ako je četverokut paralelogram tada se njegove dijagonale raspolavljaju.
4. obrat po kontrapoziciji, ako je četverokut tangencijalan tada je $a + c = b + d$.
5. obrat po kontrapoziciji.
6. faktorizirajte izraz na lijevoj strani. ispitajte parnost faktora.
7. pretpostavimo suprotno i dodemo do kontradikcije. Kako opcenito možemo zapisati racionalni broj?
8. pretpostavimo suprotno tj da ima konacno mnogo prostih brojeva. probajte pomocu tih prostih brojeva konstruirati novi koji ce biti veci od ostalih time cete doci do kontradikcije.
9. ispitajte svaki slučaj.
10. Ponekad se više isplati dokazivat striktno. Nitko ne zabranjuje koristiti Pitagorin poučak, ali iz Pitagorinog poucka nemožemo automatski zaključiti da vrijedi i obrat.
11. Kada je implikacija istinita? Kakvi tada moraju biti zasebni $P \wedge (Q \Leftrightarrow \neg R)$ i $(\neg P \vee F) \wedge (Q \vee R)$? ...
12. Obrat po kontrapoziciji. Dokažite : ako je n složen broj, onda je i R_n složen. Kako još možemo zapisat R_n?
13. Dokažite oba smjera.

11. Hintovi za drugu grupu

11.1. G2: Ivan Premuš - Hvatanje kutova

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Na skicu docrtajte polumjer.
2. Talesov teorem
3. Prikaži što više kuteva preko kuta $\angle ABC$.
4. Docrtajte sjecišta interesantnih pravaca i kružnice. Obodni kutovi su vaši prijatelji.
5. Promatrajte presliku H' i pokažite da ona leži na kružnici.
6. Pronađite korisne jednakokračne trokute.
7. Lovite obodne i vršne kutove.
8. Što zanimljivo možete reći o točki D u odnosu na trokut ABC?
9. Lovite kutove.
10. Tetivni četverokut.
11. Obodni kutovi opisane kružnice.
12. Tetivni četverokut.
13. Gdje se točno nalaze S i T? Lovite kutove.
14. Tetivni četverokuti.

11.2. C2: Martin Vrbovčan - Prebrojavanje

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promatraj varijacije bez ponavljanja: odabir 4 znamenke uz poredak.
2. Permutacije multiskupa: podijeli s faktorijelom broja istih objekata.
3. Sjeti se da broj djelitelja broja s prostim faktorima α_i dobiva oblik $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$.
4. Kombinacije s ponavljanjem: primijeni *stars and bars*.
5. Kombinacije bez ponavljanja: jednostavno biranje podskupa.
6. Nenegativna rješenja jednadžbe – opet *stars and bars*.
7. Okrugli stol: permutacije različitih osoba modulo rotacije.
8. Koristi komplement: broj svih ruku minus ruke bez asa.
9. Inkluzija–ekskluzija za skup permutacija: prebroji $|A|, |C|, |A \cap C|$.
10. Prebroj full house u pokeru: biraj rang trojke, boje, pa rang i boje za par.
11. Permutacije riječi s ponavljanjima: koristi multiskup formulu.
12. Podskupovi bez susjednih elemenata: smanji problem na kombinacije $\binom{11-k}{k}$ i sumiraj.
13. Inkluzija–ekskluzija s ograničenjem $x_i \leq 6$.
14. Broj dijelova ravnine: koristi indukciju, svaki novi pravac doda n dijelova.
15. FUI, ideja je gledat slučaj kada imamo ta dva kutna polja, slučaj kad je figura na jednom od ta dva kutna polja i kada je na oba.
16. Broj parova učenika jednak broju dana puta 3. Izjednači s ukupnim brojem parova $\binom{15}{2}$.
17. (a) Prisjeti se da birati k osoba od n znači isto što i izabrati $n-k$ onih koje *nisu* u ekipi.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

    (b) Fiksiraj jednu osobu. Razmisli: u ekipi može biti ili *jest* ili *nije*.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

    (c) Razmisli o načinu biranja kapetana: možeš ga odabrati *nakon* ekipe ili *prije*.

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

    (d) Svaka osoba može biti odabrana ili ne. Koliko mogućnosti to daje?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(e) Uži izbor pa tim, ili obrnuto – prvo tim pa ostatak užeg izbora.

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

(f) Predsjednik i podpredsjednik mogu biti ista osoba ili različite osobe. Razdvoji ta dva slučaja i usporedi.

$$(n+n^2)\cdot 2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

18. Ideja rješenja je izračunati zbroj brojeva na ploči zbrajanjem po pravokutnicima, a ne po poljima.

19. Dvostruko prebrojavanje

20. LHS: odredi prvi izabrani element, RHS: broj svih $k+1$ podskupova.

21. Označimo s P traženi broj pravokutnika. Ako s $n(XYZW)$ označimo broj pravokutnika u pravokutniku $XYZW$, tada vrijedi:

$$P = n(DFCA) + n(GHBA) - n(DEBA).$$

22. Promotrimo tablicu s 8 redaka i n stupaca takvu da na presjeku i-tog retka i j-tog stupca pišemo 1, ako je i-ti sudac ocijenio j-tog natjecatelja s *prošao*, i pišemo 0, ako je i-ti sudac ocijenio j-tog natjecatelja s *nije prošao*.

23. Najprije permutacije vozila (10!), zatim raspored parkirnih mjesta kao kombinacije s ponavljanjem.

24. Lema zadatka:

    Ako je neki poredak dobiven tako da je svaki biciklist s oznakama iz nekog podskupa $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ pretekao točno jednom, te su j i k najmanje oznake koje nisu u S, onda isti poredak možemo dobiti tako da svaki biciklist iz skupa $S \cup \{j,k\}$ pretekne točno jednom.

25. Označimo s d_i broj jedinica u i-tom retku. Tada je broj parova jedinica u i-tom retku $\binom{d_i}{2}$.

    Pošto ne postoje četiri jedinice koje čine pravokutnik, mora po Dirichletovom principu biti

$$\sum_i \binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

11.3. A2: David Lang - Faktorizacije

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Raspiši razliku kubova. Kako možemo izračunati član xy?
2. Na što te podsjeća $2014 \cdot 2016$? Stavi $\mathrm{x} = 2015$.
3. Pomnoži s ab. Zbroj kubova.
4. Stavi u drugoj jednadžbi sve na zajednički nazivnik. Kako iz prve jednadžbe možemo doći do $a^2 + b^2 + c^2$?
5. Nadopuni do kvadrata.
6. Proširi do kvadrata.
7. Nadopuni sve do kvadrata. Prvo iskoristi sve a-ove, pa sve b-ove, pa sve c-ove.
8. Prebaci $30n^2$ na lijevu stranu i faktoriziraj. Onda gledaj proste faktore od desne strane (od 507 jer se 10 koristi za faktorizaciju lijeve strane) i prođi kroz sve mogućnosti.

11.4. N2: Ivan Premuš - Prosti brojevi

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promatrajte sumu ovih brojeva. Drugi način: promatrajte parnost od n.

2. Faktorizirajte. Što vrijedi za neke uzastopne brojeve?

3. Uzastopni brojevi.

4. Kako dobiti "jako složene" brojeve?!

5. Faktorizirajte.

6. Promatrajte mod 5.

7. Slična fora kao Euklidov teorem. Pretpostavite suprotno i smislite pametan novi broj za promatrati.

8. Faktorizirajte $p^2 - 1 = 2q^2$.

9. Mod 3.

10. Faktorizirajte drugi broj. Definicija prostih brojeva.

11. Kakve ostatke mod 3 daju 2^p i p^2 za $p > 3$?

12. Formula za rješenje kvadratne jednadžbe. Promatrajte izraz ispod korijena.

13. Zapišite x i y kao $x = da$, $y = db$ pri čemu je $d = M(x, y)$ te vrijedi $M(a, b) = 1$. M označava najveći zajednički djelitelj.

14. Promatrajte posebno slučajeve $p, q \leq 3$ i $p, q > 3$.

15. Zaključite da x dijeli y.

16. Dirichletov princip.

17. Kako bi faktorizirali ovaj broj? Što možete reći o tim faktorima?

18. Najprije pokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva koji će biti djelitelji broja $m^4 + 1$ za neki prirodan m.

19. Indukcija po broju prostih faktora.

11.5. X2: Marija Dora Marodi - Matematička indukcija

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci

1. $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

2. Isto kao u uvodu.

3. $n > 2$ sigurno za sve $n \geq 4$.

4. U koraku indukcije možemo više puta koristiti pretpostavku i isto možemo koristiti da je n za koji smo pretpostavili da vrijedi veći jednak 4.

5. U koliko se točaka sijeku dva pravca koja nisu paralelni? Koliko novih sjecišta ćemo dobiti ako na konfiguraciju od n pravaca dodamo još jedan?

Zadaci

6. Koje ćemo sve nove podskupove dobiti ako dodamo još jedan element?

7. Fiksiraj broj ljudi i dodaj rukovanja.

8. Dobiti $x^n + \frac{1}{x^n}$ kao dio izraza dobivenog kao produkt brojeva za koje znamo da su cijeli.

9. Na malim primjerima pogledajte što se dogodi kada na n pravaca dodamo $n+1$.

Teži zadaci

10. Trebat će pretpostaviti nešto ne samo za n nego i sve ranije.

11. Ploča $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ sastoji se od 4 ploče $2^n \times 2^n$. Kako možete popločati sredinu velike ploče?

12. Vidimo da se ovo ne može direktno dokazati indukcijom, pa probajmo ubaciti neki član koji ovisi o n na lijevu stranu kako bi tvrdnja i dalje vrijedila, a kako bi onda ju onda mogli dokazati indukcijom tako kako piše. Znači želimo neki izraz koji ovisi o n za koji će razlika tog izraza za n i $n+1$ biti veća od $\frac{1}{n^2}$.

13. U koraku (za $n+1$) promatrajte n kružnica i što se dogodi s bojanjem kad dodamo tu zadnju kružnicu.

14. Generalno vrijedi za 2^n igrača i niz od njih $n+1$.

15. Pogledajmo kako izračunati sumu za skup $\{1, 2, ..., n+1\}$ tako da posebno gledamo podskupove koji sadrže $n+1$ i koji ne sadrže $n+1$.

12. Hintovi za treću grupu

12.1. G3: Marija Dora Marodi - Fantomiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Zagrijavanje

1. Angle chase u oba slučaja.
2. Neka je točka E na produžetku stranice AB preko vrha A takva da je $|AE| = |AC|$.
3. Fantomiraj, neka je F na dužini $\overline{DE}$ takva da je $\angle EBF = 20$.

Zadaci

4. Hint 1. Gdje se M nalazi (osim sjecištu kružnica)? Uvedi M'. Hint 2. Kut između tetive i tangente, središnji, obodni?
5. Zbog jednakokračnih trokuta ABN i CBM, uvedimo ortocentar H trokuta ABC. Tada:

$$\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ANB = \angle ANC,$$
$$\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle BMC = \angle AMB.$$

   Kako nam ovo pomaže?
6. Fantomiramo točke K i L po svojstvima kutova.
7. Potrebno je dodati dvije točke; neka E bude sjecište dužine $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ te F neka bude drugo sjecište pravca AE i kružnice sa središtem u točki C.
8. Ključ je uočiti da je zajednička točka zapravo podnožje visine iz A. Označimo tu točku s D i neka je $AD \perp BC$.

Teži zadaci

9. Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABP; tada O leži na simetrali dužine AB. Postavimo $\angle DPA = x$, $\angle ABP = 2x$, $\angle PAD = 3x$.
10. Ključna opažanja je da su D, Q i nožište C_1 visine iz C (koje leži na ω jer je $\angle AC_1H = 90^\circ$) kolinearne. Ako to dokažemo, tada se problem svodi na dokazivanje $HR = HC_1$, što slijedi iz kutova na ω, tj.

$$\angle HAR = 90^\circ - \angle AHR = 90^\circ - \angle APR = 90^\circ - \angle APC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAH = \angle C_1AH.$$

11. K neće biti samo na simetrali $\overline{AT}$, nego i na simetralama $\overline{MX}$ i $\overline{NY}$ (AT, MX i NY će biti paralelni pravci). Fantomiraj X' kao sjecište kružnice i pravca kroz M paralelnog s AT (AT je simetrala kuta u A). Želimo dokazati da je X' na simetrali $\overline{AC}$, tj. $|AX'| = |X'C|$.

Ako Vam je dosadno :)

12. Hint 1: Neka je točka X presjek pravca AC i A_1C_1.
Hint 2: Povucimo tangentu na k u točki E.

12.2. C3: Marko Hrenić - Igre

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Prisjetite se *primjera 1.*
2. Pokušajte igrati igru s manjim primjerima.
3. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača (*simetrija*)?
4. Pokušajte igrati igru s malim primjerima te tako naslutite rješenje i dokažite ga indukcijom.
5. Može li neki igrač oponašati poteze drugog igrača?
6. Pretpostavite da drugi igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu pa dokažite suprotno.
7. Tko od igrača i na koji način može osigurati da postoji dostupno neposjećeno polje nakon svakog poteza? Smislite strategiju kojom biste to osigurali.
8. Slično kao u 6. zadatku, pretpostavite da prvi igrač uvijek gubi te dokažite suprotno.
9. Obojajte crvenom bojom polja na dijagonali. Zašto nije moguće obojati manje polja crvenom bojom?

Teži zadaci

10. Dokažite da Lazo ima pobjedničku strategiju te odredite tu strategiju. Primijenite ideju kao u 7. zadatku.
11. Primijetite da su dva uzastopna broja sigurno relativno prosta, kao i da dva parna broja sigurno nisu relativno prosta te iskoristite tu ideju (rješenje će se razlikovati za paran i neparan n).
12. Dokažite da, ako se na početku najveći broj ponavlja paran broj puta, tada će se i nakon svakog poteza također ponavljati paran broj puta (*Zašto je to dovoljno?*).
13. Pokušajte naslutiti rješenje na malim primjerima te zatim pronađite što jednostavnije strategije koje funkcioniraju općenito.
14. Na malim primjerima naslutite koji n su rješenje te induktivnim zaključcima to i dokažite (ti induktivni zaključci neće biti baš standardni).

12.3. A3: Zvonko Andrijević - KAGH i CSB

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. A-G
2. A-G, slično kao primjer 1.
3. Pametno iskoristiti CSB
4. CSB
5. A-G
6. Između ova dva izraza uvijek vrijedi nejednakost. Primjeni CSB i pažljivo pročitaj teorem
7. A-H ili pomnoži obje strane s $a+b+c$ i onda CSB
8. Raspiši pa primjeni A-G, nakon toga nađi faktorizaciju
9. Pomoću A-H pokušaj naći $x+y+z$. Nakon toga raspiši oba izraza.
10. CSB
11. Slična fora kao prošli zadatak
12. Pokušaj faktorizirati izraz tako da su s lijeve strane sve nepoznanice, a s desne strane neka konstanta
13. Kubiraj, razmnoži i primijeni A-G
14. Pokušaj pretvoriti lijevu stranu u geometrijsku sredinu
15. Primjeni CSB na: $a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)$
16. $2xy \leq x^2+y^2$
17. Npr. u prvi razlomak dodaj ab^2
18. Napravi A-G na nazivnik, pri tome razdvoji 2 na 1+1

12.4. N3: Dario Vuksan - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

One-for-all hint za kongruencije je *probaj modulo mali broj* i to svaki mali broj. Više nego vjerojatno će neki od njih pomoći (osim 6, taj je gotovo uvijek beskoristan)

1. Posljednja znamenka je promatranje modulo 10. Promotri posljednje znamenke malih potencija broja 2: $2^1, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{10}$. Što zaključuješ?
2. Koristeći svojstva kongruencija: $(x-y)(x+y) \equiv 0 \mod p$
3. Svaki broj je $3k$ ili $3k+1$ ili $3k+2$. Kvadrirajte svaki slučaj pa promotrire. Analogno za 4 i za 8.
4. a) Zapiši potenciju kao umnožak toliko brojeva. Koristi svojstva kongruencija. b) Raspiši broj u bazi 10.
5. Dokaži da ne može biti ništa od $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$.
6. Promotri jednadžbu modulo neki mali broj. Prisjeti se Zadatka 3.
7. Zapiši to kao kongruenciju pa sredi
8. Promotri p modulo 3
9. Promotri p modulo 3
10. Promotri male potencije broja 7 modulo 10.
11. "Pogodi" koji mod promatrati.
12. Počni od kongruencije modulo $3^n - 2$.
13. Promotri male potencije broja 3 modulo 10.
14. Riješi po slučajevima n modulo 3.
15. Riješi po slučajevima n modulo 4.
16. Prisjeti se Zadatka 3.
17. Promotri kongruenciju $x \equiv x^3$. Koji ćemo modulo uzeti?
18. n je sigurno djeljiv sa 7. Može li nam mod 7 ikako pomoći?
19. Zapiši izraz u kongruenciji modulo 7 pa sredi.
20. Promotri broj $ab+1$ modulo $b+2$. Prisjeti se: $m \mid n \implies m \leq n$ i postoji k takav da $n = km$
21. Promotri modulo neki mali broj
22. Promotri mod 2 (parnost)
23. Taj kvadrat je paran, znači da je djeljiv s 4. Promotri mod 4.
24. Promotri parnost a i b modulo 8 i analiziraj slučajeve
25. Ovo je malo tricky zadatak. Izvuci faktorizaciju $5k^2 =?$ i analiziraj međusobno faktore.

26. Dokaži da su n i m parni
27. Ispiši vrijednosti za neke n i pretpostavi koji mod treba promatrati.
28. Probaj sve male modove :)
29. Kakvi brojevi imaju paran broj djelitelja? Suma djelitelja je suma parova $d+\frac{n}{d}$ za svaki djelitelj $d<\sqrt{n}$
30. Promotri potencije broja 2 modulo 3.

Hint za izazov: raspiši broj u bazi 10.

12.5. X3: Zvonko Andrijević - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Parnost
2. Crno-bijelo bojanje
3. Pogledaj zbroj sva tri člana nakon svake iteracije
4. Zbroj oba člana
5. Podijeli vrhove u dva skupa tako da svaka operacija djeluje na oba skupa
6. Gledaj ostatak pri dijeljenju 7
7. Gledaj ostatak pri dijeljenju 3
8. Crno-bijelo bojanje
9. Pogledaj zbroj svih faktora umnoška
10. Podijeli osobe u dva skupa: onih koji su se rukovali parno mnogo puta i oni koji su se rukovali neparno mnogo puta. Promatraj kako se sa svakim rukovanjem mijenja parnost skupa ljudi koji su se neparno mnogo puta rukovali
11. Za svaki redak označi ih brojevima od 1 do 15 i to napravi za svaki stupac. Zbroji sve i gledaj promjenu parnosti.
12. Spoji sve točke nasumično. onda pogledaj neke dvije dužine koje se sijeku i "raspetljaj ih". Uoči što se događa sa zbrojem svih dužina nakon toga
13. Gledaj opseg koji zauzimaju parcele s korovom
14. Gledaj najveći zajednički djelitelj oba člana
15. Gledaj mod 9
16. Gledaj umnožak, ali ne svih članova nego njihovih...
17. Uvedi $f(x) = x^2 - 3x + 3$
18. Gledaj kako se suma mijenja svakom zamjenom. Nakon toga gledaj mod 5
19. Gledaj sumu recipročnih vrijednosti svakog broja. Uoči zašto je to monovarijanta!
20. Promatraj broj brojeva koji su najveći. Jeli on ikad neparan?
21. Slično se rješava kao primjer 2, ali je dosta teži. Nakon što nađeš neprijateljski par (A, B) pokušaj naći par $(A'B')$ tako da su (A, A') i (B, B') prijatelji te pokušaj "okrenuti" dijelove stola tako da oni završe zajedno
22. $a \odot b = 1 \odot \frac{b}{a}$
23. Obojite ploču u 3 boje tako da su dijagonale iste boje. Analizirajte što se događa nakon svakog s brojem žetona na svakoj boji. Neka vam zadatak 7. bude inspiracija za ovaj dio
24. Nađi neku funkciju kojoj se stalno smanjuje vrijednost. U ovom slučaju to će bit

$$f(x_1, ..., x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - x_{i+2})^2$$

13. Hintovi za četvrtu grupu

13.1. G4: Marko Hrenić - Trig smash

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Sinusov poučak na trokute ABM i AMC.
2. HINT 1: $\angle EAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$
   HINT 2: sinusov poučak na AEB pa AFE
   HINT 3: adicijske formule
3. Talesov teorem (obodni kutevi nad promjerom su pravi), teorem o obodnim kutevima, sinusov poučak.
4. Supstitucija $t = \sin x$, ograničiti nejednakostima.
5. Raspis Sinusovog poučka.
6. svedi na KAGH type of nejednakost s sinusima ili omjerima stranica.
7. Povuci AD na BC tako da je $\angle CAD = 90°$. Igranje s trigonometrijskim jednadzbama kasnije.
8. raspiši početnu jednakost, definiraj $\angle BAM, \angle CAN$ i radi sinusove poučke, svedi jednadzbe na ctg x i ctg y
9. poucak o simetrali kuta, sinusov poucak
10. sinusov poucak, zatim kosinusov poucak i onda raspisi jednadbu da dokazes
11. sinusov poucak da se dobi omjer $\frac{|BM|}{|CM|} = 1$
12. angel chase, nakon čega Sinusovi poučci
13. angle chase, nejednakosti AG
14. Ptolomejev teorem, trig tek na kraju
15. Dovoljno je pokazati $\dfrac{HA'}{A'K} = \dfrac{GD}{DM}$, pri čemu je A' sjecište visine iz vrha A i kružnice opisane trokutu ABC.
16. Iskoristiti potenciju točke B, dovoljno je dokazati da su A_1, A_2, C_1 i C_2 konciklične, a u tu svrhu je dovoljno izračunati $|BA_1|$ i $|BA_2|$.
17. trisekcija kuta $\angle BAC$
18. angle chase, sinusov poucak, nejednakosti s kutevima, ogranicavanje kuteva

13.2. C4: Simeon Stefanović - Nesigurna prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Pecivo se može izabrati na 3 načina, šunka na 6 načina (bez šunke ili sa jednom od vrsta), a sir na 5 načina.

2. Recimo da stavljamo topove po retcima, u prvi redak možemo top postaviti na 8 načina, nakon što smo ga postavili, na koliko načina možemo postaviti sljedeći top?

3. Osobu koja će osvojiti kekse možemo izabrati na 15 načina. Zatim, prvu osobu koja će osvojiti sok možemo izabrati na 15 načina, a drugu na 14.

4. Brojeva manjih od 1000 i djeljivih sa 3 je 333, a djeljivih sa 7 je 142. Broj je djeljiv i sa 3 i sa 7 ako i samo ako je djeljiv sa 21, a takvih manjih od 1000 ima 47.

5. Ideja je pogledati koliko brojeva nema znamenku 5 i onda taj broj oduzet od svih peteroznamenkastih brojeva.

6. ko broj šahista označimo s x, a broj penzionera s y, što nam vrijedi iz uvjeta zadatka vezano za broj ljudi?

7. Formula uključivanja i isključivanja.

8. Koliko imamo različitih parova? Svaki dan učionicu čisti tri različita para.

9. (a) Prisjeti se da birati k osoba od n znači isto što i izabrati $n-k$ onih koje *nisu* u ekipi.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(b) Fiksiraj jednu osobu. Razmisli: u ekipi može biti ili *jest* ili *nije*.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

(c) Razmisli o načinu biranja kapetana: možeš ga odabrati *nakon* ekipe ili *prije*.

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

(d) Svaka osoba može biti odabrana ili ne. Koliko mogućnosti to daje?

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

(e) Uži izbor pa tim, ili obrnuto – prvo tim pa ostatak užeg izbora.

$$\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$$

(f) Predsjednik i podpredsjednik mogu biti ista osoba ili različite osobe. Razdvoji ta dva slučaja i usporedi.

$$(n+n^2)\cdot 2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

10. Ideja rješenja je izračunati zbroj brojeva na ploči zbrajanjem po pravokutnicima, a ne po poljima.

11. Dvostruko prebrojavanje

12. Za početak promatrajmo broj permutacija vozila, odnosno redoslijed kojim će biti parkirana. Takvih permutacija ima 10!

13. Pretpostavi suprotno. Brojimo parove oblika $(P,\ c)$, pri čemu je P polje, a c crveni brid koji omeđuje to polje. Prebrojat ćemo ih na dva različita načina.

14. Lema zadatka:

Ako je neki poredak dobiven tako da je svaki biciklist s oznakama iz nekog podskupa $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$ pretekao točno jednom, te su j i k najmanje oznake koje nisu u S, onda isti poredak možemo dobiti tako da svaki biciklist iz skupa $S \cup \{j, k\}$ pretekne točno jednom.

15. Označimo s d_i broj jedinica u i-tom retku. Tada je broj parova jedinica u i-tom retku $\binom{d_i}{2}$.

Pošto ne postoje četiri jedinice koje čine pravokutnik, mora po Dirichletovom principu biti

$$\sum_i \binom{d_i}{2} \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

13.3. A4: Dario Vuksan - Teleskopiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Rastavi na parcijalne razlomke. Koji se članovi poništavaju u sumi?
2. Rastavi na parcijalne razlomke. Koji se članovi poništavaju u sumi?
3. Koji se članovi krate u produktu?
4. Rastavi na dva produkta.
5. Rastavi na parcijalne razlomke, ali tako da su faktorijeli u nazivniku.
6. Zbroji puno zadanih jednakosti za različite k.
7. Rastavi na parcijalne razlomke.
8. Rastavi na dva produkta.
9. Racionaliziraj
10. Zapiši kao razliku dva razlomka
11. Faktoriziraj nazivnik. Uoči vezu između dva faktora.
12. Rastavi na parcijalne razlomke. Što ako stupanj brojnika nije manji od stupnja nazivnika?
13. Rastavi na parcijalne razlomke.
14. Prepoznaj opći član. Što je u brojniku, a što u nazivniku?
15. Kako dobiti teleskopsku sumu (kako izraziti F_n tako da se u zbroju teleskopira)? Gdje ćemo dobiti minus?
16. Koristi treću potenciju umjesto druge
17. Koristi četvrtu potenciju umjesto četvrte
18. Na što podsjeća svaki faktor? Kako postići razliku kvadrata?
19. Raspiši faktor k tako da se poništi u sumi.
20. Zapiši $k^2 + k + 1$ nekako drugačije tako da je $(k^2 + k + 1)k! = A_k k! - A_{k-1}(k-1)!$
21. Isto kao prethodni zadatak.
22. Lijeva strana nejednakosti je očito zbroj recipročnih vrijednosti korijena. Što ako je desna strana nejednakosti isto sličan zbroj u kojem su pribrojnici teleskopirani?
23. (Uputa: pomnoži i podijeli istim izrazom) Promotri dvije susjedne potencije, npr. x^k i x^{k+1}. Čime množimo jednu, a čime drugu tako da se ponište?
24. Koristi jednu od trigonometrijskih transformacijskih formula.
25. Iskoristi rekurzivnu relaciju da transformiraš opći faktor.
26. Izluči konstantu i zamijeni indekse s ciljem pojednostavljivanja postupka.

13.4. N4: Mislav Plavac - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. pogledaj svaki broj zasebno mod 7
2. Primijeni Eulerov teorem za svaki modul zasebno: izračunaj $\varphi(n)$ i svedi velike eksponente modulo $\varphi(n)$, pa spoji rezultate kongruencijaom.
3. Iskoristi da je $999 \equiv -1 \pmod{1000}$ i pratite parnost eksponenata — znak će se izmjenjivati za neparne potencije.
4. Zapiši kongruenciju $29^p + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ i primijeni mali Fermat ($29^p \equiv 29$ za $p \neq 29$) da svedeš izraz; traži djelitelje malog broja koji se pojave.
5. Svedi eksponente koristeći $\varphi(49) = 42$, pa pronađi multiplikativne inverze 6^{-1} i 8^{-1} modulo 49 i izračunaj konačni ostatak.
6. Za reduciranje tornja eksponenata primijeti da trebaš eksponent modulo $\varphi(7) = 6$; nađi ostatke modulo 2 i modulo 3 pa spoji pomoću CRT-a (ili jednostavne analize parnosti).
7. Najprije svedi veliki eksponent modulo $\varphi(11) = 10$ — pogledaš ostatke modulo 2 i 5 da bi odredio eksponent, pa primijeni mali Fermat za konačno reduciranje.
8. Svodi $4^p + 5^p$ modulo p koristeći $a^p \equiv a \pmod{p}$; to daje jednostavnu kongruenciju za p i ograničava moguće vrijednosti.
9. Razloži $5p^2 + 1 = (5p)^p + 1$ i promatraj izraz modulo p; svedi i provjeri male proste djelitelje koji zadovoljavaju uvjet.
10. Iskoristi faktorizaciju $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \cdots + b^{p-1})$ i činjenicu da su svi sabirci u drugom faktoru kongruentni a^{p-1} modulo p, pa pokaži da drugi faktor dijeli p.
11. Pretvori uvjet u oblik $2^{2n-4} \equiv 1 \pmod{17}$ i iskoristi red elementa 2 modulo 17 (perioda 8) — rješavaj kongruenciju za n i provjeri male slučajeve.
12. Samo bashaj po k-ovima
13. Počni od slučaja $n = 3$ i koristi indukciju da pokažeš da vrijedi $3^{2\cdot 3^m} + 1$ za sve $m \geq 1$. Zatim razmotri općeniti n: ako $n \mid 2^n + 1$, onda vrijedi i $2^n + 1 \mid 2^{2n+1} + 1$. Na kraju, za prost n primijeni Fermatov mali teorem da zaključiš da jedino $n = 3$ zadovoljava uvjet.
14. Rješavaj kongruenciju postupno po modulima 9, 13 i 17. Ako je n djeljiv dotičnim modulom, slučaj je trivijalan. Inače, koristi Eulerov teorem i svojstva $\varphi(m)$ da reduciraš eksponente: prvo pokaži kongruenciju modulo malih faktora (npr. $2, 3, 4, 8$) pa kombiniraj rezultate. Najzahtjevniji dio je slučaj mod 17, gdje treba analizirati $n^n \pmod{8}$.
15. (a) Promatraj ostatke prostih brojeva oblika $4k+3$ i iskoristi Mali Fermatov teorem da pokažeš kontradikciju za kongruenciju $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. (b) Uoči da x mora biti neparan, pa analiziraj faktorizaciju $y^2 + 1 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$ i provjeri kakve oblike imaju faktori; dobit ćeš kontradikciju s dijeljenjem brojem $4k+3$. (c) Preoblikuj jednadžbu u $(4m-1)(4n-1) = (2x)^2 + 1$ i koristi prvi dio zadatka za kontradikciju.
16. Grupiraj članove sume simetrično $(k^{p+2} + (p-k)^{p+2})$ i pokaži da je svaka grupa djeljiva s p. Zatim iskoristi Mali Fermatov teorem da reduciraš eksponente, pa zaključi da je rezultat djeljiv s p^2.

17. Primijeti da $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

13.5. X4: Mislav Brnetić - Princip ekstrema

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promotrite najveći broj u krugu.
2. Pretpostavite da postoji konačno mnogo prostih brojeva te promotrite najveći od njih. Dokažite da tada postoji i veći prosti broj.
3. Bez smanjenja općenitosti pretpostavite $x \geq y \geq z$.
4. Ako je točaka konačno mnogo, postoji par točaka takva da je udaljenost među njima najveća među svim parovima.
5. Promotrite najdulju dijagonalu.
6. Promotrite grad u koji dolazi najviše cesta.
7. Promatrajte put od 1 do n^2.
8. Promatrajte trokut najveće površine.
9. Promotrite raspored u kojem je ukupan broj neprijateljstava unutar istog doma minimalan. Što biste mogli napraviti ako i tada neki zastupnik ima 2 neprijatelja u istom domu?
10. (a) Promatrajte najkraću udaljenost između neke dvije osobe.
    (b) Promatrajte najdulju stranicu u poligonu.
    (c) Radite indukciju, uočite da je baza dana u (a) dijelu.
    (d) Pretpostavite da je u osobu A pucalo barem šest osoba, $A_1, \ldots, A_6$. Koliko iznosi najmanji kut među kutovima $\angle A_i A A_{i+1}$ za $i = 1, 2, \ldots, 6$? Što to znači za udaljenosti?
11. Pretpostavite suprotno te tada promatrajte trokut najmanje površine.
12. Ako sve točke nisu na jednome pravcu, među svim parovima (p, L) gdje je p točka, a L pravac koji ne sadrži p, postoji par za koji je udaljenost između točke i pravca najmanja. Razmotrite taj par.

14. Hintovi za petu grupu

14.1. G5: Karla Pogelšek - Homotetija i spiralna sličnost

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci:

1. Nađite pripisanu kružnicu
2. $BPINT$ je tetivan. Što nam to daje?
3. D je centar neke spiralne sličnosti.

Teži zadaci:

1. Ako je A' preslika A preko O iP sjecište $A'M$ sa (ABC). Kamo spiralna sličnost u P šalje (ABC)?
2. Kompozicija homotetija je još uvijek homotetija. Promotrimo transformaciju $\omega_1 \xrightarrow{T_1} \omega \xrightarrow{T_2} \omega_2$.
3. Što se dogodi pri homotetiji iz T koja šalje jednu kružnicu u drugu?
4. Koja dva trokuta su spiralno slična?
5. Trokut definiran linijama r_A, r_B i r_C dobiven je homotetijom $\Delta I_A I_B I_C$. Gdje je centar te homotetije i gdje šalje točke?
6. Reflektiraj A preko I.(postoji i mrvicu teže rješenje homotetijom. Neka se tangente kroz X i Y sijeku u Z, onda su ZXY i AUV homotetni.)

14.2. C5: Emanuel Bajamić - Teorija grafova

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Indukcija
2. Kada u grafu postoji Eulerov ciklus?
3. Suma broja rukovanja bilo koja dva bračna partnera je ista.
4. Primjeti da je operacija biranja trgova komutativna.
5. Jaka indukcija. Alternativno, probaj poistovjetiti dobar raspored sa linearnim uređajem
6. Napravi graf nad danim elementima na pametan način.
7. Ovo je lakši zadatak nego što možda mislite, svi ga možete riješiti.
8. Na jako jako pametan način razapni graf preko trokuta i gledaj mu dubinu.
9. Napravi nejednostavni graf na n-članom skupu.
10. Upari svaki kamenčić sa nekim drugim i neka ti to budu stranice nejednostavnog grafa na n čvorova.

14.3. A5: Mislav Plavac - Funkcijske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$, a a $\{x\}$ označavamo decimalni dio, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

1. x i $1 - x$ su inverzne funkcije
2. Uvrstite dobru vrijednost.
3. Pokušajte iskoristit injektivnost.
4. Pokušajte pokratiti neke članove.
5. Uvrstite cijeli broj i broj između 0 i 1.
6. Koliko nultočaka može imati f.
7. Cauchy
8. Uvrstite dobre vrijednosti, pokušajte namjestit da obje strane ovise o samo jednoj varijabli.
9. Uvrstite cijeli broj i broj između 0 i 1.
10. Uvrstite dobre brojeve, koristite inducкiju
11. Indukcija
12. Pretpostavite da je $f(c) = 0$ za $c \neq 0$. Pazite na pointwise.
13. Uočite da rješenje mora biti oblika $x^2 + bx + c$
14. Pokušajte pokratiti neke izraze, uvrstite dobre vrijednosti.
15. Promatrajte sliku od f. Što je s brojevima koji nisu djeljivi s 5?
16. može li biti $\alpha \neq 2$, Cauchy
17. Lako se vidi da je $f(0) = 0$, a što je s $f(1)$?
18. Pokušajte ogradit funkciju ili promatrajte $n = 1, 2, 3, 4$.
19. Iz injektivnosti se lako dobije rješenje. Što ako nije injektivna?
20. Uvrstite dobre brojeve i promatrajte slučajeve.
21. Cauchy uz mnogo muka, treba pokazati da je $f(0) = 0$, f bijekcija i da je f linearna.

14.4. N5: Lana Milani - TB funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Napravi da je desna strana u samo o b.
2. Gledajući prosti p koji dijeli $a+b$ dobij izraz ovisan o b kojeg p dijeli.
3. Dobij $f(1) = 1$ i uvrsti $m = n$.
4. Uvrsti $(nb - f(b), b)$.
5. Neka je P skup prostih brojeva manjih od 10^{100}. Za svaki $p \in P$ neka je $e_p = max_x v_p(f(x))$ i neka je $c_p = argmax_x v_p(f(x))$.
6. Uvrsti male brojeve, rastavi na slučajeve i napravi indukciju.
7. Dokaži da je injekcija i promatraj nizove oblika $a, f(a), ... f^n(a), ...$ i dokaži da su svi aritmetički nizovi.
8. $k \geq 2$

14.5. X5: Karlo Jokoš - Global ideja

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Probaj uparivati neke brojeve koji imaju sumu 102.
2. Postavi ploču u koordinatni sustav tako da je svaki kvadrat cjelobrojna točka. Pozbrajaj x i y koordinate pozicija topova na početku i promatraj parnost nakon skoka topova.
3. Dvostruko prebrojavanje.
4. Dva prijatelja zajedno daju 3 ukupnoj sumi ako su različitih boja
5. Dvostruko prebrojavanje + AG
6. Postavi polukraljice i promatraj polja koja nisu u istom stupcu i retku kao polukraljice, koliko treba najmanje polukraljica da sva ta polja budu napadnuta?
7. Napravi šahovsko bojanje. Bez gubitka općenitosti, neka u kutovima bude crna boja. Pokaži da unutar pravokutnika postoji manji pravokutnik koji ima sve kutove crne, zašto nas on dovodi rješenju?
8. Ideja je prvo riješiti se ružnog algebarskog izraza prije nego što počnemo raditi išta. Kvadrirajmo nejednakost i umjesto 1^2 uvrsti $|z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots |z_n|^2$. Također znamo da $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ (s ovime sređujemo $|\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k z_k|$)
9. Ideja je prvo pojednostavit zadatak. Označi svaki vrh trokuta kao na slici:

(0,0,5)

(1,0,4) (0,1,4)

(2,0,3) (1,1,3) (0,2,3)

(3,0,2) (2,1,2) (1,2,2) (0,3,2)

(4,0,1) (3,1,1) (2,2,1) (1,3,1) (0,4,1)

(5,0,0) (4,1,0) (3,2,0) (2,3,0) (1,4,0) (0,5,0)

Transformiraj uvjet zadatka sada da ovisi o koordinatama koje smo psotavili.

10. Zadatak govori o površinama zraka koje su u dodiru jedna s drugom. Kako možeš razložiti kocku na preglednije dijelove koji pružaju više informacija o X, Y i Z zrakama (definiraj X, Y i Z zrake prema osi na koju su okomite — definicija nije bitna, samo ih međusobno razlikuj)?
11. Pristupi zadatku iz perspektive prebrojavanja. Koliko ukupno dijagonala imamo? Koliko najviše dijagonala može biti paralelno nekoj stranici?
12. Pokaži da je ukupan broj nastalih površina

$$\binom{24}{3} - (\binom{x_1}{3} - 1 + ... + \binom{x_k}{3} - 1) = 2019$$

Što su $x_1, \ldots, x_k$, kako nam ovo vodi kraju zadatka?

13. Pokušaj pronaći dva načina za sumu svih članova u svim društvima

14. Napravi sljedeće bojanje:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Zašto nam je ono korisno?

15. Pozbrajaj sve permutacije.

16. (a) Promotri 4 točke: Koliki je maksimalan broj šiljastokutnih trokuta koji se može formirati od 4 točke?

(b) Iskoristi to lokalno ograničenje kako bi procijenio globalni maksimum za 100 točaka.

(c) Primijeni ograničenje kako bi pokazao da udio akutnih trokuta nije veći od 70%.

17. Razmisli o tome kako možeš dodijeliti brojeve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tako da:

- svaki b_i bude barem a_i;
- svi b_i imaju različite ostatke pri dijeljenju s n;
- zbroj svih b_i nije prevelik.

Pokušaj izgraditi b_i jedan po jedan, pri čemu je svaki novi b_i:

- najmanji mogući broj veći ili jednak a_i,
- i da nije kongruentan ni jednom od prethodnih b_j po modulu n.

Postavi si pitanje: ako svaki broj b_i mora biti različit po modulu n, koliki je maksimalni mogući zbroj svih b_i ako ih rasporediš pametno?

18. Počni s dokazivanjem

$$\sum w_i = \sum l_i \quad \text{i} \quad \sum w_i^2 = \sum l_i^2$$

Promatraj zadatak kao usmjereni graf. Pogledajmo skupinu koja je dobra te promotrimo koliko strijelica izlazi iz svakog člana, trebao bi dobiti samo 4 mogućnosti. Pokušaj pogledati kako se te 4 mogućnosti međusobno kombiniraju.

15. Hintovi za šestu grupu

15.1. G6: Lana Milani - G mix

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Uvedi točku D na opisanoj kružnici ABC tako da je $BD = BC$.
2. Uvedi polovište kraćeg luka DE i središte opisane kružnice ABC. Dokaži da je $APMO$ romb.
3. Dokaži da se opisan kružnica XPC i YPD sijeku u Q.
4. Neka je X presjek AB i CD i Y presjek AB i $C'D'$ gdje su C' i D' preslike C i D preko PM gdje je M središte luka APB.
5. Primijeti da je šesterokut $ABCDEF$ presjek dvaju sukladnih trokuta i promatraj rotaciju kojom se jedan preslikava u drugi.
6. Promotri Eulerov pravac trokuta ABC i njegove preslike preko stranica trokuta.
7. Uvedi N polovište EF i dokaži da je P, N, H kolinearno.

15.2. C6: Maša Dobrić - Kombe nabacane lopatom

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Indukcija
2. Kada u grafu postoji Eulerov ciklus?
3. Suma broja rukovanja bilo koja dva bračna partnera je ista.
4. Zamisli skup djelitelja n kao t-dimenzionalni kvadar gdje je t broj različitih prostih djelitelja od n.
5. Primjeti da je operacija biranja trgova komutativna.
6. Indukcija.
7. Nemoj fiksirati početni raspored oraha. oboji iskorištene orahe u crno.
8. Jaka indukcija. Alternativno, probaj poistovjetiti dobar raspored sa linearnim uređajem
9. Po visini podijeli igrače u N skupina od $N+1$ igrača.
10. Na jako jako pametan način razapni graf preko trokuta i gledaj mu dubinu.
11. Brojevi od 1 do 2018 se nalaze u različitim retcima, "jedan iznad drugog".
12. Broj točaka sa jedne strane pravca l se ne mijenja.
13. Napravi nejednostavni graf na n-članom skupu.
14. Gledaj izraz $c_1 s_1 + \cdots + c_m s_m$ za $c_i \in \{0, \ldots, m-1\}$ i s_i je suma elemenata B_i.
15. Jako veliki krug.
16. Upari svaki kamenčić sa nekim drugim i neka ti to budu stranice nejednostavnog grafa na n čvorova.
17. Zeko iskreno dojavljuje svoju lokaciju lovcu.
18. Reprezentiraj niz kao histogram sa gravitacijom (ma što god to značilo).
19. Erdos-Szekeres

15.3. A6: Adrian Grbac Lacković - Funkcije izvodnice

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Lakši zadaci

1. Što dobimo kad deriviramo $\sum x^n$ dva puta?

2. Definiraj funkciju i primjeni rekurziju

3. Koja je funkcija izvodnica za niz $a_n = \binom{a+b}{n}$

4. (a) Dokaži $\binom{2n}{n} = (-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$ i koristi napomenu 1.5

(b) Koristi primjer 3

Umjereni zadaci

5. Pogledajmo funkciju $f(x, y, z) := (x + 2x^2 + 3x^3 \dots)(y + 2y^2 + 3y^3 \dots)(z + 2z^2 + 3z^3 \dots)$

6. Definirajte funkciju tako da je $[x^k]f(x)$ broj n-znamenkastih brojeva čije su znamenke iz skupa $\{2, 3, 7, 9\}$ čiji je zbroj znamenaka k.

7. Neka je $[x^k y^l]f(x, y)$ broj kombinacija gdje je Petru palo k, a Luciji l pisama. Što će biti f?

Teži zadaci

8. Pronađite rekurziju za C_n (prebrojite po slučajevima koliko zagrada ima u prvoj zagradi).

Iskoristite rekurziju na funkciji izvodnici i onda primjetite da je to skoro umnožak dva reda.

9. Konstruirajte funkciju $f(a, b, c, d)$ t.d. je $[a^i][b^j][c^k][d^l]f(a, b, c, d)$ jednak broju riječi s m slova a, n slova b...

10. Napravite funkciju t.d. je $[x^m y^n]f(x, y)$ broj podskupova veličine n čiji je zbroj članova m.

11. Neka su a_n i b_n odgovarajuće sume te f, g odgovarajuće funkcije izvodnice, za f

15.4. N6: Patrik Cvetek - Polinomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Promatraj polinom $X^n - 1 - (X-1)(X-2)\cdots(X-n)$.
2. Koristi Eisensteinov kriterij.
3. Pretpostavi da $p \mid W(n)$ za neki $n \in \mathbb{N}$, probaj dobit kontradikciju.
4. Koristi lemu 1.
5. Koristi lemu 1.
6. Koristi lemu 1.
7. Dokaži $1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n \equiv 0 \pmod{p}$ za sve $n < p-1$.
8. Koristi diriklerov teorem.
9. Pametno zapiši P da se riješiš funkcije T, onda iskoristi lemu 1.
10. Dokaži ako $p \mid f(n)$ i $p \nmid n$ da tada $p \mid f(1)$.
11. Igraj se s malim slučajevima.

16. Hintovi za MEMO grupu

16.1. C8: Emanuel Bajamić - Poseti

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Numeriraj elemente lanaca prema poziciji u lancu.
2. Ako pretpostavimo da ne postoje takve dvije postaje, lanac u A je antilanac u B i obrnuto.
3. Intervali se ne sijeku akko su usporedivi. To tvori poset.
4. Mirsky.
5. Pridruži svakom elementu niza uređeni par brojeva koji nekako opisuje taj element. Dokaži njču tvrdnju nego što zadatak traži.
6. Indukcija po veličini poseta.
7. Erdos-Szekeres

16.2. A: Karlo Jokoš - Idejaste funkcijske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

1. Pogodi koje je rješenje i uvedi supstituciju $g(x)$ koja će se koristiti time (na što te jednadžba podsjeća?)

2. Članovi unutar f-ova su ružni. Radi se supstitucija $x^2 - y^2 = a$ i $2xy = b$, koliko je $x^2 + y^2$

3. Primijeni f s obje strane od $f^{f^{f(x)}(y)}(z)$

4. Koje je rješenje funkcijske jednadžbe? Zadatak je na istu foru kao prvi zadatak.

5. Uzmi $n = f^{(k)}(m)$, pokušaj dobiti nešto simetrično i iskoristi indukciju.

6. Ako uzmemo $f(0) = a$ i uzimanjem $P(1,0)$ dobivamo $f(a) = 0$. Ideja je dokazati da je f injektivan u 0, odnosno $f(x) = 0 \iff x = a$. Ovo radimo kontradikcijom pretpostavljajući suprotno. Ovo je jako korisno raditi zbog $P(f(x) - 2x, x)$.

7. $$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

8. Ovdje je rješenje jako nestandardno, ono upučuje kako se rješava zadatak. Rješenje je
$$f(x) = \begin{cases} a - x & x \text{ paran} \\ b - x & x \text{ neparan} \end{cases} \quad \text{gdje } a = b \text{ ili su i a i b ovoje parni}$$

9. Imamo da je funkcija aditivna, dakle, potrebno je još samo dokazati na nekom intervalu da je ograničena da možemo zaključiti da je linearna. Konkretno, dokazat ćemo to za interval $(0, \frac{1}{2})$

10. Zapiši n u binarnoj reprezentaciji i razmišljaj koji je skup rješenja.

11. Dodajemo novu varijablu z tako da vrijedi
$$xf(x) - zf(z) = (x - z)f(x + z)$$
da možemo postići
$$xf(x) - zf(z) = xf(x) - yf(y) + yf(y) - zf(z) = (x - y)f(x + y) + (y - z)f(x + z)$$

12. Krećemo s $g(n) = f(n) + 1$ što daje da je g kompletno multiplikativan i $g(2) = 8$. Želimo pokazati da $g(p) = p^3$. Ne ustručavaj se koristit log

13. A zašto nebismo probali nešto glupo? neka $x + y = ab, xy = b$. Naravno, ovdje nije kraj jer je domena zadatka $\mathbb{R}^+$, a s ovime što smo napravili smo dobili malo *smrdanu* domenu. Fixaj to!

14. Prisjeti se identiteta
$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$$
obgrlivši to u funkciju dobivamo (koristimo aditivnost f)
$$f\left(\frac{1}{x-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

15. Dokaži da slike od f i g imaju formu

$$f(\mathbb{N}) = \{A, A+1, \dots\}$$

$$g(\mathbb{N}) = \{B, B+1, \dots\}$$

te dokaži da za bilo koji nenegativni k imamo

$$g(f(n)+k) = g^{k+1}(n) + 1$$

16. Nakon $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$ te nakon $y = 1$ dobivamo

$$f(x+1) = (f(1)-1)f(x) + 1$$

Mi jako zelimo saznati vrijedost of $f(1)$. Označimo $f(1) = a$. Za $a = 1$ dobivamo jedno rješenje, pretpostavimo da $a \neq 1$, izračunaj $f(2), f(3, f(4)$ u ovisnosti o a i dobij jednadžbu 4. stupnja ukojoj dobivaš 2 mogućnosti za a.

17. Svedi zadatak na jedan prijašnji zadatak :D

16.3. N8: Patrik Cvetek - Bi$\mathbb{N}$go

Predavanje Hintovi Rješenja

Hintovi

Odgovor je da.	Dokaži injekciju.	Probaj konstruirat graf.	Probaj male slučajeve i vidi zašto neki brojevi rade, a neki ne.	Dokaži da desna strana raste puno manje nego lijeva.
Pronađi a i b eventualno s malo prostih dijelitelja.	Odgovor je da. Pronađi n-ove za koje se onaj polinom može faktorizirat.	Polinom je nakon neke točke rastuč. Iskoristi to da saznaš nešto o zadatku.	Uoči ako a i b zadovoljavaju sljedeće da će onda i ab.	Probaj male slučajeve.
Indukcija.	Promotri na koje načine $n!$ može dobit faktore od p.	Promotri da je $a_{n+1} = a_n$ ili $a_{n+1} = a_n + 1$.	Malo izmanipuliraj zadanu jednadbu.	Probaj pronači način da podijeliš prvih N brojeva u 2 skupa, grupirajući ih u parove.
Promotri da ako shiftaš brojeve da se broj brojeva za koje neko svojstvo vrijedi ili promjeni za 1 ili ostaje isto.	Svi brojevi su relativno prosti.	Indukcija.	Dokaži da je $3 \mid v_p(abc)$ za svaki p.	Promatraj $v_2(q!) = q - s_2(q)$.
Koristi nejednakosti i ograniči n.	Dokaži $\beta(n) = \frac{n}{2}$.	Uoči da je $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ili $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.	Odgovor je ne. Dokaži da za proizvoljno velik N nije moguče da su svi brojevi od 1 do N $k$ul.	Za a dio promotri što se dogodi kad je n ogroman prost broj. Za b dio pronađi rješenje i daj dokaz da te koji nemogu i konstrukciju za one koji mogu.

III. Rješenja s predavanja

17. Rješenja za prvu grupu

17.1. G1: Mislav Plavac - Sličnost i sukladnost

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Sukladnost i sličnost - Primjer 1.
2. Sukladnost i sličnost - Primjer 2.
3. Općinsko 2016. OŠ - 8.5.
4. Županijsko 2006. OŠ - 7.4.
5. Županijsko 2015. OŠ - 7.5.
6. Neka su zadane dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ takve da se međusobno raspolavljaju i označimo sjecište s S. A, B, C, D čine četverokut. Uočimo da su trokuti ΔABS i ΔCDS sukladni po SKS poučku, pa je kut BAC jednak SCD, što znači da su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednake duljine i paralelni. Analogno se dokaže da su stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ paralelne. Obratno,ako je zadan paralelogram $ABCD$ i označimo sjecište dijagonala s S, uočimo također sukladnost trokut ΔABS i ΔCDS, kao i za trokute ΔASD i ΔBCS.
7. Lako vidimo da je $\angle CC'A = \angle BC'C$ i $\angle CAC' = \angle BCC'$ pa su trokuti $\triangle AC'C$ i $\triangle CC'B$ slični po K-K poučku. Iz sličnosti dobivamo:
$$\frac{v}{p} = \frac{q}{v} \implies v^2 = pq \implies v = \sqrt{pq}.$$
8. Izvor.
9. Neka je D nožište visine iz A, M polovište stranice $\overline{BC}$, a E nožište visine iz M na $\overline{AC}$. Iz uvjeta zadatka znamo da su kutevi $\angle BAD$, $\angle DAM$ i $\angle MAE$ jednaki što nam daje
$$\Delta ABD \cong \Delta ADM \cong \Delta MAE$$
Sada znamo da je $MC = BM = 2ME$ iz čega se lako vidi da su kutevi trokuta $30°, 60°, 90°$.
10. Neka je povučena simetrala kuta iz vrha B i točka D sjecište te simetrale tog kuta sa stranicom $\overline{AC}$. Tada je $|\overline{AD}| = |\overline{BD}$. Jer je $\angle CBD = \angle BAC$ i $\angle ACD$ zajednički kut, trokuti ΔABC i ΔBDC su slični. Tada vrijedi:
$$\frac{c}{y} = \frac{b}{a} = \frac{a}{b-y}.$$
Kako je $ac = by$, iz omjera $\frac{b}{a} = \frac{a}{b-y}$ slijedi $b^2 - a^2 = ac$, što je trebalo i dokazati.
Alternativno: Sukladnost i sličnost - Zadatak 7.

11. Neka je Q točka na pravcu AP takva da je $|AQ| = 2|AP|$, P između A i Q. Po SKS poučku o sukladnosti trokuta vidimo da su trokuti ABQ i KAN sukladni (jednake stranice zbog paralelograma i kvadrata, jednaki kut dobijemo jer je puni kut u A jednak $360°$). Slijedi $|KN| = |AQ| = 2|AP|$.

12. 1.zadatak.1 razred 2002 godina.

Teži zadaci

13. Neka je $\angle CBA = 30°$.Te neka su $b = |\overline{AC}|$,$c = |\overline{AB}|$ i $a = |\overline{BC}|$. Produžimo pravac BC preko točke C i neka je E sjecište pravaca SD i AE. Primjetimo tada da su trokuti ΔABC i ΔASE slični. Tada je

$$\frac{b}{\frac{c}{2}} = \frac{a}{|\overline{SE}|},$$

tj.

$$|\overline{SE}| = \frac{ac}{2b}.$$

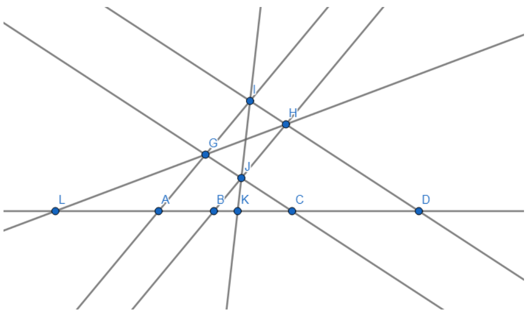
Kako je jedan kut u trokutu ΔABC jednak $30°$, slijedi da je $c = 2b$, pa uvrštavanjem u zadnju nejednakost dobivamo $|\overline{SE}| = a = |\overline{BC}$, iz čega slijedi da su ta dva trokuta sukladna. Prema teoremu o omjeru težišnice u trokutu ΔABE

$$|\overline{SD}| = \frac{1}{3}|\overline{SE}| = \frac{1}{3}|\overline{AB}|,$$

što je trebalo i dokazati.

14. Neka su L i K sjecišta dijagonala paralelograma i pravca p te G, H, I i J vrhovi paralelograma, kao na skici.
$\sphericalangle AIK = \sphericalangle BJK$ i $\sphericalangle KAI = \sphericalangle KBJ \Longrightarrow \Delta BKJ \sim \Delta AKI \Longrightarrow \frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|KJ|}{|KI|}$
$\sphericalangle KID = \sphericalangle KJC$ i $\sphericalangle IDK = \sphericalangle JCK \Longrightarrow \Delta KCJ \sim \Delta KDI \Longrightarrow \frac{|KC|}{|KD|} = \frac{|KJ|}{|KI|}$
$\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|KC|}{|KD|} \iff \frac{|BK|}{|AB|+|BK|} = \frac{|KC|}{|KC|+|CD|} \iff |BK|(|KC| + |CD|) = |KC|(|AB| + |BK|) \iff \frac{|CD|}{|AB|} = \frac{|KC|}{|BK|}$
Što znači da je K točka koja dijeli dužinu $\overline{BC}$ u omjeru $|AB| : |CD|$, neovisno o izboru usporednica.

$\sphericalangle GCL = \sphericalangle HDL$ i $\sphericalangle CLG = \sphericalangle DLH \Longrightarrow \Delta LCG \sim \Delta LDH \Longrightarrow \frac{|LC|}{|LD|} = \frac{|LG|}{|LH|}$
$\sphericalangle LGA = \sphericalangle LHB$ i $\sphericalangle ALG = \sphericalangle BLH \Longrightarrow \Delta LAG \sim \Delta LBH \Longrightarrow \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|LG|}{|LH|}$
$\frac{|LC|}{|LD|} = \frac{|LA|}{|LB|} \iff \frac{|LA|+|AC|}{|LB|+|BD|} = \frac{|LA|}{|LB|} \iff |LA|(|LB|+|BD|) = |LB|(|LA|+|AC|) \iff \frac{|LA|}{|LB|} = \frac{|AC|}{|BD|}$
Što znači da položaj točke L ne ovisi o izboru usporednica.



15. Izvor.

16. Neka je $|BF| = x$, $|DE| = y$ i $|AE| = z$. BSO možemo pretpostaviti $|AB| = 1$.
Dobivamo $|CE| = 1 - y$ i $|FC| = 1 - x$.
Neka je $G = AF \cap CD$.
Iz paralelnosti stranica kvadrata dobivamo $\angle GAE = \angle BAF = \angle CGF = \angle EGA$, odnosno trokut $\triangle EAG$ je jednakokračan.
Sada

$$|CG| = |EG| - |EC| = |AE| - |CE| = z - (1 - y) = z + y - 1$$

$\angle BAF = \angle CGF$ povlači da su trokuti $\triangle FBA$ i $\triangle FCG$ slični.
Tako su omjeri odgovarajućih stranica jednaki, pa dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{z+y-1}{1-x} &= \frac{1}{x} \\ zx + yx - x &= 1 - x \\ x(y+z) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Primjenom Pitagorina poučka na trokut $\triangle ADE$ slijedi

$$1 = z^2 - y^2 \tag{2}$$

Konačno, iz (1) i (2)

$$\begin{aligned} x(y+z) &= 1 \\ x(y+z) &= z^2 - y^2 \\ x(y+z) &= (z-y)(z+y) \\ x &= z - y \\ x + y &= z \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

17. Iz sličnosti ΔBFG i ΔBCN slijedi $\frac{a+b}{b} = \frac{a}{x}$,gdje je $x = |CN|$. Odatle je $x = \frac{ab}{a+b}$.Iz sličnosti ΔADE i ΔAMC slijedi $\frac{a+b}{a} = \frac{b}{y}$, gdje je $y = |CM|$.Odatle je $y = \frac{ab}{a+b} = x$. Označimo $P(\Delta ABQ) = P_1$ i $P(MCNQ) = P_2$. I sada imamo:

$$P(\Delta ABC) = P_1 + P(\Delta AMC) + P(\Delta BNC) - P_2,$$

odnosno

$$\frac{ab}{2} = P_1 + \frac{1}{2}b \cdot \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{2}a \cdot \frac{ab}{a+b} - P_2.$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi $P_1 = P_2$.

17.2. C1: Ivan Premuš - Dirichletov princip

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Primjetimo da prirodni brojevi pri dijeljenju s 14 mogu davati ostatke $0, 1, 2, \ldots, 13$, pa imamo 14 mogućnosti. Budući da imamo 15 brojeva, a 14 mogućih ostataka, po Dirichletovom principu znamo da postoje barem dva broja koja daju isti ostatak prije dijeljenju s 14. Upravo je njihova razlika djeljiva s 14.

2. Promatrajmo 15 zbrojeva $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + \cdots + a_{15}$. Ako je neki od njih djeljiv s 15 gotovi smo. U suprotnom, svaki od zbrojeva pri dijeljenju s 15 daje neki ostatak različit od 0, što ostavlja 14 mogućnosti. Po Dirichletovom principu zaključujemo da postoje dva zbroja, neka su to $a_1 + \cdots + a_k$ i $a_1 + \cdots + a_l$, $k < l$, koja daju isto ostatak prije dijeljenju s 15, pa će njihova razlika, odnosno zbroj $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ biti djeljiva s 15.

3. Po Dirichletovom principu, sigurno postoji razred sa barem $\lfloor \frac{1000-1}{30} \rfloor = 34$ učenika pa samim time će u razredu s najviše učenika biti barem 34 učenika. Preostaje dokazati da je ta situacija moguća, odnosno da postoji slučaj kada u razredu s najviše učenika i jest 34 učenika. Jedan takav primjer su 20 razreda sa 33 učenika i 10 razreda sa 34 učenika pa možemo zaključiti da je traženi najmanji mogući m zaista 34.

4. Pretpostavimo najprije da postoji osoba koja se rukovala sa svima, odnosno s 499 osoba. Tada ne postoji osoba koja se nije rukovala ni sa kim, pa su mogućnosti $1, 2, \ldots, 499$. Po Dirichletovom principu zaključujemo da postoje barem dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.
Ako ne postoji nitko tko se rukovao sa svima ostalima, mogućnosti su $0, 1, \ldots, 498$, pa ponovo po Dirichletovom principu zaključujemo da postoje dvije osobe koje su se rukovale s istim brojem ljudi.

5. Kod geometrijskih zadataka u kojima želim primijeniti Dirichletov princip česta je ideja podijeliti lik, odnosno tijela na sukladne dijelove koji će predstavljati "kutije". Primijetimo da je $51 = 25 \cdot 2 + 1$, pa podijelimo prozor na 25 kvadrata stranice $\frac{1}{5}$ m. Prema Dirichletovom principu znamo da mora postojati kvadratić u kojem se nalazi barem 3 komarca. Ostaje provjeriti da metlica zaista može pokriti kvadratić, ali to je jasno jer je polumjer kruga opisanog svakom kvadratiću jednak $r = \sqrt{\frac{1}{50}} < \sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$.

6. U svakom stupcu/retku/dijagonali moguće je postići zbrojeve $-5, -4, ..., 5$ kojih ima 11 različitih. Kako imamo 5 stupaca, 5 redaka i 2 dijagonale, sigurno će se jedan zbroj ponoviti barem 2 puta.

7. Ako dvije točke imaju koordinate (a, b) i (c, d), onda polovište dužine koja ih spaja ima koordinate $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Stoga zaključujemo da polovište dužine koja spaja dvije točke cjelobrojnih koordinata ima cjelobrojne koordinate ako i samo ako su odgovarajuće koordinate tih dviju točaka jednake parnosti. Budući da različitih kombinacija parnosti koordinata točaka ima 4, među ovih 5 točaka postoje dvije jednakih kombinacija parnosti pa je i polovište dužine koja ih spaja točka cjelobrojnih koordinata.

8. Označimo ljude slovima A, B, C, D, E, F. Promotrimo pet dužina koje spajaju točku A s ostalim točkama i obojimo svaku crveno ili plavo. Želimo pokazati da postoji trokut čije su sve tri stranice ili crvene ili plave. Po Dirichletovom principu postoje 3 dužine iste boje, neka su to, bez smanjenja općenitosti, dužine $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AF}$ i obojane crveno. Promotrimo sada trokut $\triangle BDF$. Ako su sve tri stranice plave, našli smo plavi trokut. Inače, barem je jedna dužina crvena, neka je to, BSO, $\overline{BD}$. Tada trokut $\triangle ABD$ ima sve tri stranice crvene.

9. Općinsko 2013., 3. razred srednje škole, A varijanta, 5. zadatak

10. Neka je S_i zbroj brojeva upisanih u i-tom i njemu susjednim isječcima, $i = 1, 2, \ldots, 36$. Primjetimo da je

$$\sum_{i=1}^{36} S_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{36} = 1988.$$

Kada bi svi zbrojevi bili najviše 55, bilo bi

$$\sum_{i=1}^{36} S_i \leq 36 \cdot 55 = 1980.$$

Budući da to nije istina, mora postojati neki $S_i \geq 56$. (Krnić, M., *Dirichletovo pravilo*)

11. $D = a^3b - ab^3 = ab(a-b)(a+b)$. D je paran za bilo koje a i b, još moramo dokazati djeljivost s 5. Ako je ili a ili b djeljiv s 5, tvrdnja je dokazana. Ako bilo koja dva od tri početna broja imaju isti ostatak pri dijeljenju s 5, tvrdnja je dokazana. Ako sva tri imaju različite ostatke pri dijeljenju s 5, tj. 123, 234, 341 ili 412, uvijek možemo odabrati dva čiji je zbroj djeljiv s 5, tj. zbroj 2 i 3 ili 1 i 4, pa je tvrdnja dokazana.

12. Županijsko natjecanje 2010., 2.A, 5. zadatak

13. Županijsko natjecanje 2018., 1.A, 5. zadatak

14. (a) Promotrimo brojeve: $1, 11, 111, ..., \overline{11...1}$ (zadnji ima $n+1$ znamenku 1).

Kako postoji n ostataka pri dijeljenju sa n, među ovim brojevima postoje barem 2 s istim ostatkom pa je njihova razlika djeljiva sa n. Njihova je razlika broj oblika 11...10...0 koji zadovoljava uvjete iz zadatka pa je time dokazano da postoji traženi broj.

(b) Pretpostavimo suprotno: traženih višektatnika ima konačno mnogo.

Dakle, kako postoji barem jedan višekratnik oblika iz (a) dijela zadatka, postoji i najveći takav višekratnik, označimo ga sa a_{max}.

$$a_{max} = \overline{11...1} - \overline{11...1}$$

pri čemu prvi od ovih brojeva ima k znamenki 1.

No, sada pogledajmo brojeve koji se sastoje $k, k+1, k+2, ..., k+n$ znamenki 1.

Po (a) dijelu zadatka dobivamo da postoji višekratnik broja n koji se može prikazati kao razlika dvaju od ovih brojeva, a taj je broj sigurno veći od broja a_{max}.

Međutim, a_{max} je po pretpostavci najveći takav broj pa iz toga slijedi kontradikcija.

Dakle, traženih višekratnika ima beskonačno mnogo.

15. Označimo s t niz znamenaka 192352458628 (za rješenje je potpuno nebitno o kojem je nizu znamenaka riječ). Promotrimo brojeve: $\overline{t}, \overline{tt}, ..., \overline{tt..t}$ pri čemu zadnji od brojeva ima 2024 puta niz znamenaka t. Među tim brojevima postoje barem 2 s istim ostatkom pri dijeljenju sa 2023 iz čega slijedi da je njihova razlika djeljiva brojem 2023, a kako započinje nizom znamenaka t zadovoljava uvjete zadatka.

16. Ako tih šesto točaka određuje konveksni šesterokut, onda je zbroj njegovih unutarnjih kutova $720°$, pa je sigurno jedan kut veći od $120°$. Vrh toga kuta i dva susjedna određuju traženi trokut. U suprotnom, pretpostavimo da tih šesto točaka ne određuje konveksni šesterokut. Tada sigurno možemo odabrati neke tri točke od zadanih šest tako da barem jedna od preostalih leži unutar trokuta koji čine odabrane tri. Spajanjem te točke s točkama u vrhovima trokuta dobivamo tri trokuta sa zajedničkim vrhom. Očito barem jedan od ta tri kuta pri tom vrhu mora biti veći od $120°$.

17. Školsko natjecanje 2019., 4.A, 7. zadatak

18. Promotrimo sve 4 dužine paralelne sa stranicama kvadrata, koje dijele kvadrat na dva dijela čiji su omjeri površina 2 : 3. Podijelimo nekim pravcem kvadrat na dva trapeza čije su površine u omjeru 2 : 3 te promotrimo zajedničku stranicu tih trapeza koja se nalazi na pravcu. Geometrijski se lako pokaže kako ta stranica siječe jednu od 4 ranije opisane dužine u njenom polovištu. Sada nam je cilj promotriti ta 4 polovišta. Primijetimo kako svaki od zadanih pravaca prolazi kroz neko od ta 4 polovišta. No, po Dirichletovom principu sada zaključujemo da kroz jedno od tih polovišta prolaze barem 3 pravca, čime je dokaz završen.

19. Ako svi učenici imaju istog zajedničkog djeda, gotovi smo. Inače, neka k učenika ima djedove A i B. Tada svaki od preostalih $20-k$ učenika ima točno jednog od djedova A ili B, a prema uvjetima zadatka svi oni imaju zajedničkog djeda C. Neka n-tero djece ima djedove A i C, a preostalih $20-k-n$ djece djedove B i C. Prema Dirichletovom principu, barem jedan od brojeva $n, k, 20-k-n$ je najviše 6, inače je $20 = n+k+20-k-n \geq 21$. Neka je, na primjer, $k \leq 6$. Tada je broj unučadi djeda C $20-k \geq 14$, što dokazuje tvrdnju.

20. Državno natjecanje, 4.A, 5. zadatak

21. Pokažimo da među razlikama $a_{20}-a_{19}, \ldots, a_2-a_1$ postoje četiri koje su međusobno jednake. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje najviše tri jednake razlike. Budući da se među razlikama $a_{20}-a_{19}, \ldots, a_2-a_1$ najviše tri puta javljaju 1, 2, 3, 4, 5 i 6 vrijedi $a_{20}-a_1 = (a_{20}-a_{19}) + (a_{19}-a_{18}) + \cdots + (a_2-a_1) \geq 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 3\cdot 4 + 3\cdot 5 + 3\cdot 6 + 7 = 70$. S druge strane $a_{20} < 70$ i $a_1 \geq 1$, odnosno $a_{20}-a_1 \leq 68$, pa smo došli do kontradikcije. Zaključujemo da među promatranim razlikama moraju postojati četiri međusobno jednake.

22. Županijsko 2022, 4.A, zadatak 4.

17.3. A1: Antonia Čović Kaćunić - Jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Postavimo sustav jednadžbi:
$\frac{x+y}{2} = 18 \Rightarrow x + y = 36$
$x^2 - y^2 = 288$ (koristeći formulu za razliku kvadrata)$\Rightarrow$ $(x-y)(x+y) = 288$

---

nakon što $x + y = 36$ uvrstimo u $(x-y)(x+y) = 288$, dobijemo $x - y = \frac{288}{36} = 8$.
sad smo zapravo dobili sustav dvije jednadžbe s dvjema nepoznanicama:

$x + y = 36$
$x - y = 8$

---

zbrojimo dobivene jednadžbe i dobijemo $2x = 44$ tj. $x = 22$
$x = 22$ uvrstimo u jednu od jednadžbi novonastalog sustava i dobijemo $y = 14$

2. x, y neparni brojevi $\Rightarrow$ možemo ih zapisati u obliku $x = 2k+1, y = 2l+1,\ k, l \in \mathbb{N}_0$
tvrdimo: $x^2 + y^2 = 8m, m \in \mathbb{N}$ (ako je neki prirodni broj djeljiv s 8, možemo ga napisati u obliku $8m, m \in \mathbb{N}$)
prvo raspišemo i faktoriziramo izraz
1. način:
$x^2 - y^2 = (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = ((2k+1)-(2l+1))((2k+1)+(2l+1)) = (2k+1-2l-1)(2k+1+2l+1) = (2k-2l)(2k+2l+2) = 2 \cdot 2 \cdot (k-l)(k+l+1) = 4(k-l)(k+l+1)$
2. način:
$x^2 - y^2 = (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = (4k^2+4k+1) - (4l^2+4l+1) = 4k^2+4k+1-4l^2+4l+1 = 4k^2+4k-4l^2-4l = 4(k^2-l^2)+4(k-l) = 4(k-l)(k+l)+4(k-l) = 4(k-l)(k+l+1)$
Dobili smo $x^2 - y^2 = 4(k-l)(k+l+1)$. Kako je izraz djeljiv s 4, za dokaz tvrdnje dovoljno je dokazati da je $(k-l)(k+l+1)$ djeljivo s 2.
Pogledajmo slučajeve:
$1°)$ k, l iste parnosti
Ako su k i l iste parnosti, tada je $k - l$ sigurno parno pa djeljivo s 2.
$1°)$ k, l različite parnosti
Ako su k i l različite parnosti, tada je $k + l + 1$ sigurno parno pa djeljivo s 2.
U oba slučaja $(k-l)(k+l+1)$ je djeljivo s 2 čime je tvrdnja dokazana.

3. uzmimo tri uzastopna prirodna broja $n-1, n, n+1,\ n \in \mathbb{N}, n > 1$
dakle, tvrdimo da $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 9m$ gdje $m \in \mathbb{N}$
$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2+2)$
Dobili smo $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n(n^2+2)$; prema tome, kako bismo dokazali tvrdnju, dovoljno je dokazati da je $n(n^2+2)$ djeljivo s 3.
Pogledajmo tri slučaja:
$1°)$ $n = 3k, k \in \mathbb{N}$ tj. n djeljivo s 3
Tada $n(n^2+2) = 3k((3k)^2+2) = 3k(9k^2+2)$ pa kako je jedan od faktora 3, izraz je sigurno djeljiv s 3.
$2°)$ $n = 3k+1, k \in \mathbb{N}$
Tada $n(n^2+2) = (3k+1)((3k+1)^2+2) = (3k+1)((9k^2+6k+1)+2) = (3k+1)(9k^2+6k+1+2) = (3k+1)(9k^2+6k+3) = 3(3k+1)(3k^2+2k+1)$ pa kako je jedan od faktora 3, izraz je sigurno djeljiv s 3.
$3°)$ $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$

Tada $n(n^2+2) = (3k+2)((3k+2)^2+2) = (3k+1)((9k^2+12k+4)+2) = (3k+1)(9k^2+12k+4+2) = (3k+1)(9k^2+12k+6) = 3(3k+1)(3k^2+4k+2)$ pa kako je jedan od faktora 3, izraz je sigurno djeljiv s 3.
Zbog toga što je izraz djeljiv s 3 za sva tri slučaja, tvrdnja je dokazana.

4. Državno natjecanje 2023. godine, 7. razred, 1. zadatak.

5. Primijenimo Hornerov algoritam.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

	1	−6	11	−6
1	1	−5	6	0

Dakle, $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6)$.
Sad istim postupkom (Hornerovim algoritmom) faktoriziramo $x^2 - 5x + 6$ (možemo i formulom za nultočke kvadratne jednadžbe).

	1	−5	6
1	1	−4	2
−1	1	−6	12
2	1	−3	0

Dakle, $x^2-5x+6 = (x-2)(1\cdot x-3) = (x-2)(x-3)$ pa $x^3-6x^2+11x-6 = (x-1)(x-2)(x-3)$.
Rješenja početne jednadžbe su: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

6. Županijsko natjecanje 2023. godine, 8. razred, 2. zadatak.

7. Županijsko natjecanje 2022. godine, 8. razred, 1. zadatak.

8. Državno natjecanje 2017. godine, 8. razred, 2. zadatak.

9. $x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = (x^2)^2 + 4x^2y^2 + (2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2+2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2+2y^2-2xy)(x^2+2y^2+2xy) = (x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = (x-y)^2(x+y)^2$

10. Državno natjecanje 2024. godine, 7. razred, 5. zadatak

11. Županijsko natjecanje 2024. godine, 8. razred, 3. zadatak.

12. Županijsko natjecanje 2024. godine, 7. razred, 1. zadatak.

13. Državno natjecanje 2024. godine, 8. razred, 3. zadatak.

14. Državno natjecanje 2019. godine, 7. razred, 1. zadatak.

15. Državno natjecanje 2016. godine, 8. razred, 1. zadatak.

17.4. N1: Gabriel Čajsa - Znamenke

Predavanje   Hintovi   Rješenja

Rješenja

1. Art of Problem Solving
2. Art of Problem Solving
3. Uzmimo da je baza x, onda brojeve možemo zapisati kao
$$1 + x^2 + \cdots + x^{4n}$$
gdje je n prirodan broj.
Onda to možemo faktorizirati na sljedeći način:
$$1 + x^2 + \cdots + x^{4n} = \frac{(x^2)^{2n+1} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^{2n+1})^2 - 1}{x^2 - 1}$$
Sada primjenom razlike kvadrata dobivamo:
$$\frac{(x^{2n+1})^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^{2n+1}+1)(x^{2n+1}-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x+1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots - x + 1)(x-1)(x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + 1)}{(x+1)(x-1)}$$
Nakon skraćivanja i uz uvjet da je $x > 1$ (jer je x baza), slijedi složenost broja.
4. Ideja je zapisati ovaj broj na pametan način: možemo ga zapisati kao $(10^{100} - a)^2$ gdje je a neki prirodan broj. Kvadriranjem dobivamo:
$$10^{200} - 2a \cdot 10^{100} + a^2$$
Primijetimo da ako je $a > 5$, dani broj ima manje od 99 devetki na početku svog dekatskog zapisa.
To možemo prikazati nejednakošću:
$$(10^{100} - a)^2 > 10^{200} - 10^{100}$$
gdje je lijevo najmanji broj sa 99 devetki kao početne znamenke. Dakle, odgovor su svi brojevi oblika $(10^{100} - a)^2$ gdje je a broj od 1 do 5.
5. Županijsko 2013. - 4. razred, 3. zadatak
6. Art of Problem Solving
7. Dekadski zapis od $a = \overline{a_x a_{x-1} \dots a_0}$ i od $b = \overline{b_y b_{y-1} \dots b_0} = a_x + a_{x-1} + \cdots + a_0$ onda je $c = b_y + b_{y-1} + \cdots + b_0$, x i y su nenegativni cijeli brojevi ($x \geq y$), imamo:
$$a \equiv a_x 10^x + a_{x-1} 10^{x-1} + \cdots + a_0 \equiv a_x + a_{x-1} + \cdots + a_0 \equiv b \equiv \overline{b_y b_{y-1} \dots b_0} \pmod 9$$
Ovo vrijedi jer za bilo koji prirodan broj n vrijedi $10^n \equiv 1 \pmod 9$.
Dalje, zbog istog razloga, imamo:
$$b \equiv \overline{b_y b_{y-1} \dots b_0} \equiv b_y 10^y + b_{y-1} 10^{y-1} + \cdots + b_0 = b_y + b_{y-1} + \cdots + b_0 \equiv c \pmod 9$$
Čime je dokaz završen.
8. Art of Problem Solving
9. Županijsko 2018. - 3. razred, 3. zadatak

17.5. X1: Artur Garifullin - A ka logika

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1.

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
i	i	n	i	i
i	n	n	n	n
n	i	i	i	i
n	n	i	i	i

2.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge B$	$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$
i	i	i	n	n	n	n
i	n	n	i	i	n	i
n	i	n	i	n	i	i
n	n	i	n	n	n	n

3. Prvo dokažimo da je četverokut čije se dijagonale raspolavljaju paralelogram. Neka je O sjecište dijagonala četverokuta. Kutovi $\angle DOA$ i $\angle COB$ su jednaki jer su vršni. Nadalje, O raspolavlja dijagonale CA i BD, pa vrijedi $|CO| = |AO|$ i $|OD| = |OB|$. Onda su po (S–K–S) teoremu trokuti $AOD \cong OBC$, pa su i kutovi $\angle OAD$ i $\angle OCB$ sukladni, odakle slijedi $AD \parallel BC$. Analogno se pokazuje da je $CD \parallel AB$, pa je četverokut paralelogram. Obrat se dokazuje pretpostavljajući suprotno. Neka je $ABCD$ paralelogram kojemu se dijagonale ne raspolavljaju. Neka je sada O polovište dijagonale BD. Dodajmo točku C_1 na pravcu AO takvu da je $|AO| = |OC_1|$. Sada je po prethodno dokazanom ABC_1D paralelogram. No kako točkom B može proći samo jedan pravac paralelan s AD, onda je $BC = BC_1$. Analogno je i $|DC| = |DC_1|$, pa slijedi $C = C_1$, što je kontradikcija. Dakle, dijagonale paralelograma se moraju raspolavljati.

4. Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: ako je četverokut tangencijalan tada je $a+c = b+d$. Ako je četverokut tangencijalan, to znači da postoji kružnica w koja je tangentna na sve četiri stranice tog četverokuta. neka je $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b, \overline{CD} = c, \overline{DA} = d$. Označimo $w \cap a = M_1, w \cap b = M_2, w \cap c = M_3, w \cap d = M_4$. Pošto su a, b, c, d tangente na w Vrijedi $|AM_1| = |AM_4| := x, |BM_1| = |BM_2| := y, |CM_2| = |CM_3| := z, |DM_3| = |DM_4| := t$. $a + c = (|AM_1| + |BM_1|) + (|CM_3| + |DM_3|) = x + y + z + t$.
$b + d = (|BM_2| + |CM_2|) + (|DM_4| + |AM_4|) = y + z + t + x$.
Iz ćega zaključimo $a + c = b + d$.

5. Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: ako je x paran, onda je x^2-6x+5 neparan. Pretpostavimo da je x paran broj, tj. $x = 2k$ za neki cijeli broj k. Izračunajmo izraz: $x^2-6x+5 = (2k)^2-6(2k)+5 = 4k^2 - 12k + 5$. Prva dva člana, $4k^2$ i $-12k$, su parni, dok je 5 neparan. Zbroj parnog i neparnog broja je neparan, dakle $x^2 - 6x + 5$ je neparan broj.

6. Pretpostavimo suprotno tj da takve x, y, z postoje. $x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = (x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$. Možemo staviti $a = (x + y - z), b = (x + y + z)$ pa jednadzba postaje $ab = 90$. Primijetimo da su a i b iste parnosti naime $b - a = 2z$ s toga ili su a i b oba neparni ili oba parni brojevi. 90 je djeljiv s 2 no nije s 4 što znaci da ne postoje takvi a i b iste parnosti takvi da je $ab = 90$ pa dolazimo do kontradikcije.

7. Prvo ćemo pretpostaviti suprotno tj. neka je $\sqrt{3}$ racionalan broj. To znači da se može napisati u obliku razlomka, tj. $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$ gdje su m i n relativno prosti cijeli brojevi. Sada tu jednakost možemo kvadrirati i pomnožiti sa n^2 pa imamo: $3n^2 = m^2$. Ako je kvadrat nekog broja djeljiv s 3, onda je i taj broj djeljiv s 3, pa znamo da je m djeljiv s 3. Dakle m možemo napisati $m = 3k$, gdje je k neki prirodni broj. Ako to uvrstimo u jednakost imamo: $n^2 = 3k^2$ i odvade istim postupkom zaključivanja zaključimo da je n djeljiv s 3. Sada smo dobili da su i m i n djeljivi s

3, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom koja kaže da su m i n relativno prosti. Dakle $\sqrt{3}$ je iracionalan broj.

8. Pretpostavimo suprotno, da postoji konačno mnogo prostih brojeva, recimo $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Razmotrimo broj

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Budući da je N veći od svih prostih brojeva p_i, broj N nije djeljiv ni s jednim od njih, jer svaki ostatak pri dijeljenju s p_i je 1.

Dakle, N je ili prost broj koji nije na popisu, ili nije prost pa ima neki prosti djelitelj koji nije među $p_1, \ldots, p_n$.

U oba slučaja dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da su $p_1, \ldots, p_n$ svi prosti brojevi.

Stoga prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

9. Ako bi među onih šest uzastopnih dana tijekom kojih je Pinokio davao nama poznate odgovore bili i ponedjeljak i utorak, morali bismo imati dva uzastopna ista odgovora (budući da Pinokio i ponedjeljkom i utorkom govori istinu), što nemamo pa su jedine dvije mogućnosti koje preostaju da je niz pitanja počeo u utorak (a šesti odgovor dobili smo u nedjelju), kao i mogućnost da je niz pitanja počeo u srijedu (a šesti odgovor dobili smo u ponedjeljak). Ako je niz pitanja počeo u srijedu tada smo u subotu dobili odgovor "Fizika", kao i u ponedjeljak što je nemoguće budući da subotom Pinokio uvijek laže, a ponedjeljkom uvijek govori istinu. Dakle, ostaje jedino mogućnost da je niz pitanja počeo u utorak. U tom je slučaju Pinokio u utorak dao odgovor "Povijest". Kako Pinokio utorkom uvijek govori istinu, zaključujemo da je "Povijest" njegov najdraži predmet.

10. Konstruirajmo novi trokut $A_1B_1C_1$ sa stranicama a, b i c_1 takav da je $\angle B_1C_1A_1 = 90°$. Iz Pitagorinog poučka znamo da za taj trokut vrijedi $a^2 + b^2 = c_1^2$. Za naš originalni trokut vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Iz ovog zaključujemo $c^2 = c_1^2$ pa $c = c_1$. Iz SSS poučka slijedi ABC sukladan s $A_1B_1C_1$ iz čega slijedi $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90°$

11. Implikacija $A \Rightarrow B$ je lažna samo onda kada je sud A istinit, a sud B lažan. Prema tome, moramo osigurati da sud $(\neg P \vee F) \wedge (Q \vee R)$ bude istinit kad god je sud $P \wedge (Q \Leftrightarrow \neg R)$ istinit. Ako je sud $P \wedge (Q \Leftrightarrow \neg R)$ istinit, tada je P istinit, a Q i R imaju različite vrijednosti, tj. točno jedan je istinit, a drugi je lažan. Stoga je sud $Q \vee R$ svakako istinit, pa još treba postići da sud $\neg P \vee F$ bude istinit, a to možemo npr. ako uzmemo $F \equiv P$.

12. Dokazat ćemo ekvivalentnu tvrdnju: ako je n složen broj, onda je i R_n složen.

Budući da se R_n u svom dekadskom zapisu sastoji od n jedinica, možemo ga zapisati kao

$$R_n = 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{10^n - 1}{9}$$

Neka je n složen, tj. $n = mk$ za neke prirodne brojeve m i k veće od 1. Tada je

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = \frac{10^{mk} - 1}{9} = \frac{(10^m)^k - 1}{9}$$

$$= \frac{(10^m - 1)(10^{m(k-1)} + 10^{m(k-2)} + \ldots + 10^m + 1)}{9}$$

$$= (10^{m-1} + 10^{m-2} + \ldots + 10 + 1)(10^{m(k-1)} + 10^{m(k-2)} + \ldots + 10^m + 1)$$

Budući da su m i k oba veći od 1, slijedi da su oba faktora u posljednjem izrazu veća od 1, iz čega zaključujemo da je i R_n složen broj.

13. Neka je M polovište stranice AB.

Neka je $\angle ACB = 90°$. Tada je M središte kružnice opisane trokutu ABC, pa vrijedi

$$|BM| = |CM| = |AM|.$$

Zato je trokut BCM jednakokračan.

Budući da su pravci TE i BC paralelni, trokut ETM je također jednakokračan. Slijedi

$$|ME| = |MT|.$$

Prema S–K–S poučku zaključujemo da su trokuti CME i BMT sukladni.

Sada slijedi

$$\angle AEC = \angle MEC = \angle MTB = \angle PTC.$$

Obratno, ako je $\angle AEC = \angle PTC$, onda je

$$\angle BEC = \angle BTC,$$

tj. četverokut $BETC$ je tetivan.

Četverokut $BETC$ je tetivni trapez, pa je jednakokračan, tj. vrijedi

$$\angle EBC = \angle BCT.$$

Dakle,

$$|AM| = |BM| = |CM|,$$

pa je AB promjer kružnice opisane trokutu ABC, što povlači da je kut $\angle ACB$ pravi.

18. Rješenja za drugu grupu

18.1. G2: Ivan Premuš - Hvatanje kutova

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Poučak o tetivi i tangenti
2. Zbog Talesovog teorema, N je ortocentar trokuta ABM. Stoga i posljednja visina leži upravo na pravcu MN pa vrijedi tvrdnja zadatka.
3. Neka je $\angle ABC = \alpha$. Tada je iz pravokutnog trokuta $\triangle BAN$ $\angle BAN = 90° - \alpha$. S druge strane, po poučku o obodnom i središnjem kutu $\angle COA = 2\angle CBA = 2\beta$, pa jer je O na simetrali $\overline{AB}$ izračunamo $\angle CAO = 90° - \alpha$.
4. Označimo s M sjecište pravca AH i trokutu opisane kružnice, s N sjecište pravca CN i kružnice, a s φ kut $\angle BAH$. Obodni kutovi daju $\angle BCM = \varphi$. Odavde je $\angle AMC = 90° - \varphi$. Obodni kutovi nad tetivom $\overline{AC}$ daju $\angle ANC = 90° - \varphi$ pa je po Talesovom teoremu $\angle ACN = \varphi$. Kako je AOC jednakokračni trokut (radijusi!), dobivamo da je i $\angle CAO = \varphi$.
5. Neka je BSO H' preslika ortocentra s obziroma na stranicu AB. Označimo s N nožište visine iz vrha B, a s M nožište visine iz vrha C. $\angle ABN = 90° - \alpha$ pa je $\angle BHM = \alpha$. Kako je $|HM| = |MH'|$, točka B leži upravo na simetrali dužine HH' pa je $\angle HH'B = \alpha$. Zaključujemo da je $\angle CH'B$ obodni nad tetivom $\overline{BC}$ pa je tvrdnja dokazana.
6. Školsko 2014. 1.A 7.
7. Školsko 2010. 2.A 7.
8. Županijsko 2015. 3.A 4.
9. Županijsko 2016. 3.A 3.
10. Državno 2014. 1.A 3.
11. Znamo $MB = MC$, zato je dovoljno $MB = MI$. Iz obodnih kuteva po opisanoj ABC imamo $\angle MBI = \alpha/2 + \beta/2 = 90 - \gamma/2$, te $\angle BMI = \angle BMA = \gamma$, što daje MBI jednakokračan i gotovi smo.
12. Državno 2018. 4.B 5.
13. HMO MEMO test 2013. 3.
14. AOPS

18.2. C2: Martin Vrbovčan - Prebrojavanje

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Biramo 4 različite znamenke iz 10 uz poredak — to su varijacije bez ponavljanja:

$$V(10,4) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{10!}{6!} = 5040.$$

$\boxed{5040}$

2. Permutacije multiskupa: ukupno 7 knjiga od kojih su 3 identične. Broj poredaka

$$\frac{7!}{3!} = \frac{5040}{6} = 840.$$

$\boxed{840}$

3.

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$$

4. Kombinacije s ponavljanjem: biramo 5 kuglica iz 4 vrsta, redoslijed nebitan:

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = 56.$$

$\boxed{56}$

5. Kombinacije bez ponavljanja: broj izbora podskupa veličine 3 iz 12 je

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 220.$$

$\boxed{220}$

6. Stars and bars (nenegativna rješenja $x_1 + \cdots + x_4 = 10$):

$$\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 286.$$

$\boxed{286}$

7. Okrugli stol: za n različitih osoba oko okruglog stola (rotacije identične) ima $(n-1)!$ rasporeda. Za $n = 8$:

$$(8-1)! = 7! = 5040.$$

$\boxed{5040}$

8. Korištenje komplementa: ukupno petokartnih ruku je $\binom{52}{5}$. Ruku bez ijednog asa odaberemo iz preostalih 48 karata: $\binom{48}{5}$. Dakle ruku s barem jednim asom ima

$$\binom{52}{5} - \binom{48}{5}.$$

(Ovo je traženi broj; po potrebi računati decimalno.)

9. Neka je S skup svih permutacija. Neka A je skup permutacija u kojima su A i B susjedni, i C skup permutacija s C na prvom mjestu. Tražimo $|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C|$.

- $|C|$: fiksiramo C na prvo mjesto, preostale 4 permutiramo: $4! = 24$.

- $|A|$: tretiramo par $\{A, B\}$ kao jedan blok (unutar bloka A i B mogu biti u dva poretka), pa imamo 4! poredaka blokova puta 2 načina permutacije u bloku:

$$|A| = 2 \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48.$$

- $|A \cap C|$: ako je C na prvom mjestu i A i B susjedni, razmatramo slučajeve gdje je blok AB ili BA negdje među preostalih 4 mjesta. Fiksiramo C prvo, preostaje 4 mjesta za blok+ostatke: broj poredaka preostalih objekata (blok + 3 pojedinaca) je 4!, a unutar bloka 2 načina, pa

$$|A \cap C| = 2 \cdot 4! = 48.$$

(Međutim pazimo: ovo izračunavanje je ekvivalentno direktnom broju permutacija s C prvim i AB susjednim.)

Dakle

$$|A \cup C| = 48 + 24 - 48 = 24.$$

$\boxed{24}$

10. Full house: biramo rang za trojku (13 načina), iz tog ranga biramo 3 od 4 boje $\binom{4}{3}$; zatim biramo rang za paru iz preostalih 12 rangova i iz tog ranga biramo 2 od 4 boje $\binom{4}{2}$. Dakle

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 13 \cdot 4 \cdot 12 \cdot 6 = 3744.$$

$\boxed{3744}$

11. Riječ `MISSISSIPPI` ima ukupno 11 slova: M pojavi se 1 put, I 4 puta, S 4 puta, P 2 puta. Broj različitih permutacija je

$$\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}.$$

12. Broj podskupova skupa $\{1, \ldots, 10\}$ bez susjednih elemenata: za svaki k-elementni takav podskup vrijedi broj izbora

$$\binom{10-k+1}{k} = \binom{11-k}{k}.$$

Brojimo za $k = 0, 1, \ldots, 5$ i zbrojimo:

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{11-k}{k} = 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144.$$

$\boxed{144}$

13. Koristeći inkluziju–ekskluziju. Bez gornje granice broj nenegativnih rješenja je

$$\binom{24}{4}.$$

Izbacujemo rješenja u kojima bar jedna varijabla ≥ 7. Za točno j varijabli koje prelaze granicu broj rješenja je

$$\binom{5}{j}\binom{24-7j}{4},$$

(samo $j = 0, 1, 2$ doprinose). Dakle ukupno

$$\sum_{j=0}^{2}(-1)^j\binom{5}{j}\binom{24-7j}{4} = \binom{24}{4} - 5\binom{17}{4} + 10\binom{10}{4}.$$

Račun:

$$\binom{24}{4} = 10626, \quad 5\binom{17}{4} = 11900, \quad 10\binom{10}{4} = 2100,$$

pa je konačno

$$10626 - 11900 + 2100 = 826.$$

$\boxed{826}$

14. Prvo primijetimo kako 1 pravac dijeli ravninu na dva dijela. Ako je a_{n-1} broj dijelova ravnine na koji ju dijeli $n-1$ pravac, dodavanjem još jednog pravca (koji će postojeće sijeći u $n-1$) točki se broj dijelova ravnine povećava za n odnosno vrijedi

$$a_n = a_{n-1} + n$$

Kako vrijedi $a_1 = 2$, indukcijom lako dokažemo da vrijedi

$$a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

15. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A-4.3.

16. Među 15 učenika imamo $\binom{15}{2} = \frac{15\cdot 14}{2}$ različitih parova.

Svaki dan, među 3 učenika koja čiste učionicu, pojavljuju se točno 3 različita para.

Dakle, kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, broj parova učenika jednak je i $3 \cdot k$.

Imamo $3k = \frac{15\cdot 14}{2}$, odnosno $k = 35$.

17. (a) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe, a s desne strane broj odabira osoba koje ne biramo u ekipu (drugim riječima, izabrali smo sve osim onih koje želimo imati u ekipi) te time izabrali i ekipu. Na taj smo način prebrojali istu stvar.

(b) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe.

S druge strane, fiksirajmo jednu osobu.

Ako je ta osoba u ekipi, preostale članove ekipe biramo na $\binom{n}{k-1}$ načina. Inače, članove ekipe biramo na $\binom{n}{k}$ načina (s obzirom da se fiksirana osoba ne nalazi u ekipi). Na taj smo način prebrojali istu stvar.

(c) Birajmo k-članu ekipu te njenog kapetana.

To upravo možemo napraviti na $k\binom{n}{k}$ načina.

S druge strane, ako prvo izaberemo kapetana, a zatim preostale članove ekipe, to možemo napraviti na $n\binom{n-1}{k-1}$ načina.

(d) Biramo bilo koji broj ljudi (između 0 i n) od n ljudi.

S druge strane, to je jednako broju 2^n, s obzirom da svaku osobu možemo izabrati ili ne izabrati (te primjenjujemo princip produkta).

(e) Između n osoba radimo uži izbor od m osoba, a zatim među njima biramo tim od r osoba.

S druge strane, prvo biramo tim od r osoba, a zatim preostale osobe koje su bile u užem izboru (drugim riječima, namjestili smo izbor tima i prvo izabrali tim, a zatim prikazali tko je još bio u užem izboru :)).

(f) Biramo ekipu od k osoba, a zatim predsjednika i podpredsjednika, koji mogu biti i jedna te ista osoba.

S druge strane, raspišemo li izraz s desne strane, dobivamo

$$(n+n^2)\cdot 2^{n-2} = (n+n+n\cdot(n-1))2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

što je jednaku zbroju načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao istu osobu (i preostale članove između ostalih ljudi) i načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao različite osobe (i zatim preostale članove između ostalih ljudi).

18. Azra Tafro, Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje, 3. zadatak

Ideja rješenja je izračunati zbroj brojeva na ploči zbrajanjem po pravokutnicima, a ne po poljima. Drugim riječima, za svaki pravokutnik na ploči treba odrediti koliko doprinosi zbroju brojeva na ploči, a to je jednako njegovoj površini. Preostaje odrediti tu sumu koja je oblika

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} ij\cdot(n-i+1)(n-j+1))$$

19. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 8. zadatak

20. Krenimo od desne strane jednakosti.

Desna strana jednakosti predstavlja broj $k+1$-članih podskupova $n+1$-članog skupa.

Neka je naš skup oblika $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$.

S lijeve strane promatrajmo koji je prvi element (s najmanjim indeksom) koji je izabran. Ako je prvi izabrani element x_i, preostale elemente možemo izabrati na $\binom{n-i}{k}$ načina.

Dakle, lijeva strana je upravo suma broja načina izbora podskupova za svaki izbor prvog elementa, pa predstavlja istu stvar kao i desna strana.

21. Županijsko natjecanje 2013., SŠ A-4.3.

22. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 10. zadatak

23. Za početak promatrajmo broj permutacija vozila, odnosno redoslijed kojim će biti parkirana. Takvih permutacija ima 10!.

Zatim fiksirajmo redoslijed vozila te njima pridružimo parkirna mjesta. Prvo između svaka dva vozila postavimo po jedno parkirno mjesto. Preostalo je još 21 neupotrijebljenih parkirnih mjesta od kojih svako možemo postaviti na 11 lokacija u odnosu na automobile, a to možemo promatrati kao kombinaciju s ponavljanjem te napraviti na $\binom{31}{10}$ načina.

Zato je traženi broj rasporeda $\binom{31}{10}\cdot 10!$

Primijetite kako je navedeni način prebrojavanja ispravan s obzirom da ne razlikujemo parkirna mjesta, već samo njihov broj i položaj u odnosu na automobile (što je ekvivalentno početnom problemu raspoređivanja automobila).

24. Državno natjecanje 2016. SŠ A-4.5.

25. Državno natjecanje 2001., SŠ-A 4.4

18.3. A2: David Lang - Faktorizacije

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Općinsko 2019. B varijanta - 1. razred, 1. zadatak
2. Algebarski izrazi - Zadatak 7.
3. Općinsko 2019. A varijanta - 1. razred, 2. zadatak
4. Općinsko 2011. A varijanta - 1. razred, 4. zadatak
5. Zadatak 12.
6. Zadatak 11.
7. Županijsko 2016. A varijanta - 1. razred, 3. zadatak
8. 1987. AIME - Problem 5

18.4. N2: Ivan Premuš - Prosti brojevi

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Zadatak 1.
2. p je neparan, $p^2-1=(p-1)(p+1)$, $p-1$ i $p+1$ su parni brojevi i to dva parna uzastopna broja, što znači da je jedan od njih višekratnik broja broja 4 tj. djeljiv je s 4. time smo dokazali djeljivost s 8. $p-1$, p i $p+1$ su tri uzastopna broja, kako je p prost broj veći od 3, znamo da nije djeljiv s 3, pa to mora biti $p-1$ ili $p+1$.
3. Zadatak 2.
4. Primjer 2.
5. Zadatak 6.
6. BSO $q=2$ (jer inače bi oba bili neparni te izraz strogo veći od 2) pa jednadžba postaje $p^4+4^p=r$ za neki prosti r. Promatranjem mod 5 vidimo da ne postoje takvi p,q.
7. Zadatak 12.
8. $p^2-1=2q^2$ pa dobivamo $(p-1)(p+1)=2q^2$. Ako je $p>2$, onda 4 dijeli lijevu stranu pa q mora biti paran, tj. $q=2$ i izlazi $p=3$. Još provjerimo da $p=2$ nema rješenja.
9. Gledamo mod 3, dobivamo da nužno jedan od brojeva mora biti 3 i dalje je jednostavno.
10. AoPS
11. Županijsko 2010. 2.A 3.
12. AoPS
13. Državno 2010. 3.A 2.
14. Uzmimo najprije da je BSO $q=2$. Dobivamo $p=m^2-2^{p-1}$. Ako je $p=2$ zaista dobijemo rješenje $(2,2)$ i tada je $m=2$. Inače je $p-1$ paran broj pa koristimo formulu za razliku kvadrata i dobijemo $p=(m-2^{\frac{p-1}{2}})(m+2^{\frac{p-1}{2}})$. Kako je p prost, dobivamo $1=m-2^{\frac{p-1}{2}}$ i $p=m+2^{\frac{p-1}{2}}$. Odavde je oduzimanjem jednadžbi $p=2^{\frac{p+1}{2}}+1$. Međutim, za $p>2$ desna strana je uvijek strogo veća od lijeve pa jednakost ne može vrijediti. Neka je sada $q=3$. Lako se vidi da ne može biti i $p=3$ pa imamo $p>3$. Koristeći formulu za razliku kvadrata dobivamo $(p-m)(p+m)=3^{p-1}$. Odavde dobivamo jednadžbe $p-m=3^\alpha$ i $p+m=3^\beta$ pri čemu je $\alpha<\beta$ i $\alpha+\beta=p-1$. Zbrajanjem i izlučivanjem dobivamo $2p=3^\alpha(1+3^{\beta-\alpha})$. Sada mora biti $p\mid 3$, ali to znači $p=3$, a to ne može biti. Ostaje još slučaj $p,q>3$. Međutim, kako su tada $p-1$ i $q-1$ parni, a 3 ne dijeli p ni q, to $p^{q-1}=(p^{\frac{q-1}{2}})^2$ i $q^{p-1}=(q^{\frac{p-1}{2}})^2$ daju ostatke 1 pri dijeljenju s 3 (jer su kvadrati), dakle zbroj im daje ostatak 2. Međutim, m^2 može davati samo ostatke 1 ili 0 pa je ovaj slučaj nemoguć.
15. Zadatak 13.
16. 104 Problems in Number Theory, Introductory problem 7.
17. 104 Problems in Number Theory, Introductory problem 36.
18. 104 Problems in Number Theory, Advanced problem 29.
19. AoPS

18.5. X2: Marija Dora Marodi - Matematička indukcija

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadaci

1. Baza: $1 = 1^2$.

Pretpostavka: zbroj prvih n neparnih brojeva jednak je n^2 za neki n.

Korak: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$.

2. Baza $n = 1$: $1^2 = \frac{1(1 + 1)(2 + 1)}{6}$.

Pretpostavka: vrijedi $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$ za neki prirodan broj n

Korak: Dokažimo $1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}$.

$1^2+2^2+...+n^2+(n+1)^2 =$ [Iskoristimo pretpostavku indukcije za zbroj prvih n] $= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = \frac{n + 1}{6} \cdot (n(2n + 1) + 6(n + 1)) = \frac{n + 1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}$.
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

3. Baza: $4! = 24 > 16 = 2^4$.

Pretpostavka: $n! > 2^n$ za neki $n \geq 4$.

Korak: $(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

4. Baza $n = 4$: $2^4 \geq 4^2 \iff 16 \geq 16$.
Pretpostavka: vrijedi $2^n \geq n^2$ za neki prirodan broj $n \geq 4$
Korak: dokažimo tvrdnju za $n + 1$: $2^{n+1} \geq (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$
$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, pa iskoristimo pretpostavku indukcije i imamo $2^{n+1} \geq 2 \cdot n^2$
Sada još želimo dokazati da je $n^2 \geq 2n + 1$ za $n \geq 4$: $n^2 \geq 2n + 1 \iff n^2 - 2n \geq 1 \iff n^2 - 2n + 1 \geq 2 \iff (n - 1)^2 \geq 2$ što očito vrijedi za $n \geq 4$, pa onda imamo:
$2^{n+1} \geq 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$
Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

5. Lako se vidi da se svaka dva pravca sijeku. Kada dodamo prvi pravac, dobijem 0 točaka presijeka. Kad dodam drugi pravac, dobijem 1 točku presjeka (točno ta dva pravca). Kad dodam treći pravac, dobijem dvije nove točke presjeka... Kada dodam n-ti pravac, dobijem novih $n - 1$ točaka presijeka.

Mogu ponovo indukcijom pokazivati da je ovaj zbroj ono što je traženo u zadatku, ili samo primijeniti zbroj prvih $n - 1$ brojeva (tj. Gaussovu dosjetku iz uvoda).

Zadaci

6. Provjerimo bazu i iskažemo pretpostavku. Kada dodamo $n + 1$ element, tada on za svaki od $2^n - 1$ skupova stvara po jedan skup koji sada dodatno sadrži taj element, te jedan skup koji sadrži samo taj element. Dakle, postoji $2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$ podskupova što je trebalo pokazati.

7. Recimo da imamo neki broj ljudi i da se dogodilo n rukovanja, pri čemu indukcija ide po n. Ako se nitko nije rukovao, tada očito vrijedi uvjet zadatka.

Pretpostavimo da se dogodilo n rukovanja i da vrijedi uvjet zadatka. Tada ako se dogodi još jedno rukovanje, ono može biti između dvije osobe s parnim brojem rukovanja (pa se broj ljudi s neparnim broje rukovanja poveća za 2, i ostane paran), između osobe s parnim i neparnim brojem rukovanja (broj se ne promijeni) ili dvije osobe s neparnim brojem rukovanja (pa se broj ljudi s neparnim broje rukovanja smanji za 2, i ostane paran). Dakle, po principu matematičke indukcije vrijedi tvrdnja zadatka.

8. Za sve prirodne brojeve n definiramo $T(n)$: $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ je cijeli broj.
Tvrdnja vrijedi i za $n = 0$, te će to biti dio baze indukcije.
Baza: $n = 0$: $x^0 + \dfrac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$; $n = 1$: zadano u tekstu zadatka.
Korak: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-2$ i $n-1$ te dokažimo da vrijedi za n.
$x^n + \dfrac{1}{x^n} = (x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}})(x + \dfrac{1}{x}) - x^{n-2} - \dfrac{1}{x^{n-2}}$, pa je traženi izraz cijeli broj jer je umnožak dva cijela broja cijeli broj i onda je od njega oduzet cijeli broj.

Dokazali smo da tvrdnji vrijedi za 0 i 1 te ako vrijedi za $n-2$ i $n-1$ vrijedi za n pa po principu indukcije vrijedi za sve prirodne brojeve (ako vrijedi za 0 i 1 vrijedi za 2, pa vrijedi za 1 i 2 pa vrijedi za 3...).

9. Kada na n pravaca dodajemo $n+1$. vidimo da svaki puta kada taj pravac presiječe neki od postojećih n pravaca, on područje odmah iza tog pravca dijeli na 2 dijela, a tako dijeli i početno područje prije nego presiječe ijedan od pravac, pa ukupno povećava broj područja za $n+1$. Kako on uvijek povećava za najviše $n+1$, onda je najbolje moguće da na maksimalan broj područja s n pravaca dodamo pravac koji stvori još $n+1$ dodatnih područja.
Da bi se to dogodilo samo moramo pripaziti da se nikoja dva pravca ne sijeku u istoj točci jer onda imamo manje od n različitih presjeka novog pravca s starima. Također, naravno da želimo da novi pravac siječe sve stare pa ne smije biti paralelan s nikojim od prošlih.
Znači jedino što trebamo paziti kad radimo korak indukcije je da novi pravac ne prolazi nekim sjecištem dva postojeća pravca i da nije paralelan s niti jednim od njih, a to sigurno možemo jer ima beskonačno smjerova pravaca, a samo konačno smjerova kad bi bio paralelan i konačno točaka koje treba izbjeći. Baza je $n = 0$ i onda je jedno područje.
n-ti pravac povećava broj područja za n, pa s n pravaca imamo maksimalno $1+1+2+3+...+n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2}$ područja.

Teži zadaci

10. Tvrdnju dokazujemo jakom indukcijom po n.

Baza indukcije su $n = 1, 2, 3$ jer rekurzivna formula niza za te brojeve nije definirana. Kako je $1 < 2^1 < 2^2 < 2^3$, vrijedi $a_n < 2^n$ za $n \leq 3$ pa je baza dokazana.

Pretpostavimo sada da za $1, 2, ..., k$ vrijedi $a_k < 2^k$, gdje je $k \geq 3$ prirodan broj. Kako je $k+1 \geq 4$, možemo iskoristiti rekurzivnu formulu niza da izrazimo a_{k+1} kao

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} + a_{k-2}.$$

Koristeći induktivnu pretpostavku, dobivamo nejednakost

$$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2}.$$

Kako je $2^{k-2} < 2^{k-1}$, dalje vrijedi

$$a_{k+1} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} < 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k + 2^k = 2^{k+1},$$

odnosno $a_k < 2^k \implies a_{k+1} < 2^{k+1}$ što smo i htjeli dobiti pa je po jakoj matematičkoj indukciji tvrdnja dokazana.

11. Lako vidimo da ploču 2×2 možemo popločati jednom pločicom koje god polje bilo uklonjeno. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ možemo šahovsku ploču $2^n \times 2^n$ s uklonjenim bilo kojim poljem popločati trominama. Promatramo ploču veličine $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ s uklonjenim nekim poljem. Ona je sastavljena od 4 ploče veličine $2^n \times 2^n$, a uklonjeno polje nalazi se u nekoj od tih četvrtina. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se uklonjeno polje nalazi u gornjoj lijevoj četvrtini, pa tada tu četvrtinu po pretpostavci indukcije možemo popločati trominama. Promotrimo sada 4 polja koja se nalaze točno u sredini velike ploče. Jedno od njih (gornje lijevo) već smo popločali, pa na preostala 3 možemo pravilno postaviti jednu trominu. Međutim, ta tromina nalazi se u svakoj od preostalih četvrtina ploče (točno s jednim poljem), pa i te četvrtine sada možemo promatrati kao ploče $2^n \times 2^n$ s uklonjenim jednim poljem, a to po pretpostavci znamo popločati trominama. Tako smo popločali cijelu veliku ploču (osim naravno onog jednom uklonjenog polja) pa smo pokazali i korak indukcije.

12. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ neka funkcija koju ćemo kasnije definirati. Želimo da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$ za svaki prirodan broj n, te da je $f(n) > 0$, jer ćemo tada iz ove tvrdnje odmah dobiti traženu tvrdnju zadatka. Recimo da smo provjerili bazu. Pretpostavka će biti da je $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n) \leq 2$ za neki prirodan broj n, te za korak želimo dokazati $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) \leq 2$.

Kad bi imali $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + f(n+1) \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} + f(n)$, onda bi direktno imali tvrdnju koraka. Kad skratimo iste članove s obje strane vidimo da f treba zadovoljavati: $f(n) - f(n+1) \geq \frac{1}{(n+1)^2}$, usput vidimo da je f padajuća funkcija. Jedna od najjednostavnijih padajućih funkcija koje su pozitivne za sve prirodne brojeve je $f(n) = \frac{1}{n}$ i vidimo da ona zadovoljava tražene uvjete (Baza $1 + 1 \leq 2$), pa po principu indukcije vrijedi tvrdnja zadatka.

Inače, ova funkcija je nepotrebno jako organičenje, te se indukcijom može pokazati i jače ograničenje od $\frac{7}{4}$. Točna vrijednost zbroja je $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.644934$

13. Elementarna matematika 1, materijali za vježbe, zadatak 7

14. Pokažimo da vrijedi da među 2^n igrača možemo naći niz od $n+1$ onih koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Baza: $n = 1$, tj. između 2 igrača, možemo (izabrati 2 i) poredati tu dvojicu tako da je prvi dobio drugog.

Pretpostavka: za neki n možemo među 2^n igrača naći niz od $n+1$ onih koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

Korak: uzmimo "pobjednika" turnira, tj. osobu koja je pobijedila najviše mečeva. Lako se vidi da je ona pobijedila najmanje polovicu igrača. Dakle, ako imamo 2^{n+1} igrača, tada postoje pobjednik i skup od barem 2^n igrača koje je on pobijedio. Tada od tih 2^n možemo izabrati niz od $n+1$ koji zadovoljavaju uvjet zadatka. Dopunimo taj niz tako da pobjednika stavimo na početak niza, onda imamo niz od $n+2$ igrača koji zadovoljavaju uvjet zadatka.

15. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom pa pogledajmo prvo korak kako bi vidjeli koja vrsta indukcije i koja baza nam treba.
Vidjet ćemo kasnije koja treba biti pretpostavka te promotrimo sumu za skup $\{1, 2, ..., n, n+1\}$:
Ako posebno promatramo određene vrste podskupova možemo posebno odrediti vrijednost sume za svake vrstu posebno te onda sumirati te sume.

U prvoj skupini će biti oni podskupovi koji ne sadrže $n+1$:

To znači da tražimo neprazne podskupove od $\{1, 2.., n+1\}$ koji nemaju uzastopnih brojeva i ne sadrže $n+1$, odmah vidimo da su to zapravo neprazni podskupovi od $\{1, 2, ..., n\}$ koji ne sadrže uzastopne pa je po pretpostavci indukcije za n ta suma jednaka $(n+1)! - 1$.

Sada promotrimo one podskupove koji sadrže $n+1$, to znači da ne mogu sadržavati n koji je uzastopan njemu.

Sada definiramo drugu skupinu podskupova u kojoj će biti oni koji sadrže $n+1$ i još neki element skupa. Ako pogledamo traženu sumu svih takvih podskupova, vidimo da iz svakog sumanda možemo izlučiti $(n+1)^2$ i dobiti sumand od nekog podskupa od $\{1, 2, ..., n-1\}$ koji nema uzastopnih elemenata, te lako vidimo da ćemo dobiti sve takve pa je suma druge skupine jednaka $(n+1)^2\cdot$ vrijednost sume za $n-1$ koja će po pretpostavci indukcije biti $n!-1$ znači $(n+1)^2(n!-1)$.

U trećoj skupini su ostali podskupovi koji sadrže samo $n+1$ i ništa drugo tj jedan jedini skup $\{n+1\}$ čija je vrijednost sume $(n+1)^2$.

Sada zbrojimo vrijednosti od sve 3 skupine te imamo: $(n+1)! - 1 + (n+1)^2(n! - 1) + (n+1)^2 = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1$.

Vidimo da nam za indukciju trebaju pretpostavke za $n-1$ i n da dobijemo tvrdnju za $n+1$ pa trebamo provjeriti bazu za dva uzastopna broja tj za $n = 1$ (Jedini podskup je $\{1\}$ i vrijednost je 1) i $n = 2$ (podskupovi bez uzastopnih su $\{1\}$ i $\{2\}$ i vrijednost je 5).

19. Rješenja za treću grupu

19.1. G3: Marija Dora Marodi - Fantomiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Zagrijavanje

1. Ostavljeno kao vježba čitatelju.

2. Županijsko natjecanje 2016., A varijanta, 1. razred, 4. zadatak

3. Državno natjecanje 2024., 3. razred, A varijanta

Zadaci

4. JBMO SL 2023. G1

5. Bulgaria JBMO TST 2019
   Zbog jednakokračnih trokuta ABN i CBM, uvedimo ortocentar H trokuta ABC. Tada:

$$\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle ANB = \angle ANC,$$
$$\angle AHB = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \angle BMC = \angle AMB.$$

   Dakle, H leži i na kružnicama k_1 i k_2. Kako je ABC oštrokutan, $H \neq A$, pa je jedina mogućnost da je $H = K$. Tada je:

$$\angle BAC = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - \angle ACK = 40^\circ.$$

6. EGMO 2023. P2

7. Državno natjecanje 2018., 1. razred, A varijanta

8. Olympiad of Metropolises 2021
   Ključ je uočiti da je zajednička točka zapravo podnožje visine iz A. Označimo tu točku s D i neka je $AD \perp BC$. Trokut ADB je pravokutan u D, pa je D na kružnici opisanoj oko ABB_1, i vrijedi:

$$\angle P_1DQ = \angle PAQ = \angle BAB = \angle BDB_1,$$

   tako da D leži i na B_1P_1. Analogno, D leži i na C_1Q_1, pa je tvrdnja dokazana.

Teži zadaci

9. Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABP; tada O leži na simetrali dužine AB. Postavimo $\angle DPA = x$, $\angle ABP = 2x$, $\angle PAD = 3x$. Tada je $\angle AOP = 2\angle ABP = 4x$. Zatim $\angle ADP = 180^\circ - \angle DPA - \angle PAD = 180^\circ - 4x$, pa je

$$\angle AOP + \angle ADP = 4x + (180^\circ - 4x) = 180^\circ,$$

to jest četverokut $ADPO$ je cikličan. Budući da je $AO = OP$, slijedi da DO dijeli kut $\angle ADP$. Analogno, možemo zaključiti da CO dijeli kut $\angle BCP$, čime je dokaz završen.

10. Ključna opažanja je da su D, Q i nožište C_1 visine iz C (koje leži na ω jer je $\angle AC_1H = 90^\circ$) kolinearne. Ako to dokažemo, tada se problem svodi na dokazivanje $HR = HC_1$, što slijedi iz kutova na ω, tj.

$$\angle HAR = 90^\circ - \angle AHR = 90^\circ - \angle APR = 90^\circ - \angle APC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAH = \angle C_1AH.$$

Budući da je četverokut BC_1HD ciklički, imamo

$$\angle BC_1D = \angle BHD = 90^\circ - \angle HBD = \angle ACB.$$

S druge strane, iz ω i k dobijemo

$$\angle AC_1Q = 180^\circ - \angle APQ = 180^\circ - \angle APB = \angle ACB.$$

Dakle, $\angle AC_1Q = \angle BC_1D$ i time je dokaz završen.

11. IMO SL 2013. G2

11. *(Alternativno rješenje)* Ključno je primijetiti da su D, Q i podnožje visine iz C (nazovimo ga C_1) kolinearne. Budući da je $\angle ACH = 90^\circ$, C_1 leži na ω. Ako to dokažemo, problem se svodi na dokaz da je $HR = HC_1$, što slijedi iz kutova nad lukom na ω:

$$\angle HAR = 90^\circ - \angle AHR = 90^\circ - \angle APR = 90^\circ - \angle APC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BAH = \angle CAH.$$

Kako je četverokut BC_1HD cikličan, vrijedi:

$$\angle BC_1D = \angle BHD = 90^\circ - \angle HBD = \angle ACB.$$

S druge strane, iz lukova ω i k imamo:

$$\angle AC_1Q = 180^\circ - \angle APQ = 180^\circ - \angle APB = \angle ACB,$$

tj. $\angle AC_1Q = \angle BC_1D$, pa su točke kolinearne i tvrdnja slijedi.

Ako Vam je dosadno :)

12. Baltic Way 2018., Problem 14

19.2. C3: Marko Hrenić - Igre

Predavanje   Hintovi   Rješenja

Rješenja

1. Ovaj zadatak je zapravo generalizacija uvodnog primjera.

   Kao i u primjeru, ovdje vidimo da su sve pozicije $1, 2, \ldots, k$ pobjedničke (u jednom potezu moguće je doći do broja 0).

   Međutim, tada vidimo kako je broj $k+1$ gubitnička pozicija, s obzirom da s nje možemo doći samo na brojeve $1, 2, \ldots, k$ koji su pobjedničke pozicije.

   Sada, potpuno analogno, induktivno možemo zaključiti da su (samo) pozicije oblika $l \cdot (k+1)$, $l \in \mathbb{N}$ gubitničke, dok su sve ostale pobjedničke.

   Dakle, prvi igrač ima pobjedničku strategiju ako n nije oblika $l \cdot (k+1)$, inače drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

   Sama strategija je prilično jednostavna, igrač koji pobjeđuje mora oduzeti takav broj da nakon oduzimanja na ploči ostane broj oblika $l \cdot (k+1)$ (što sa svake pobjedničke pozicije sigurno može), a to je i korak indukcije u gornjem dokazu.

2. Želimo dokazati da su sve pozicije oblika $3l, l \in \mathbb{N}$ gubitničke, dok su ostale pobjedničke.

   Naime, niti jedan od brojeva $1, 2, \ldots, 2^k$ nije oblika $3l$.

   Tada zaključujemo da sa svake pozicije oblika $3l$ nužno dolazimo na poziciju koja nije oblika $3l$ (tj. poziciju oblika $3l+1$ ili $3l+2$). S tih pozicija uvijek možemo doći na neku drugu poziciju oblika $3l$, oduzimanjem brojeva 1 ili 2.

   Sada, analogno kao u 1. zadatku, induktivno dokazujemo da su pozicije oblika $3l$ gubitničke, a ostale pobjedničke (baza indukcije $n = 1, 2, 3$).

3. Želimo dokazati da Vlatka ima strategiju. Ovo je primjer strategije u kojoj jedan igrač samo oponaša strategiju drugoga (*simetrija*).

   Vlatka pritom prvi žeton postavi na sredinu ploče.

   Nakon svakog poteza drugog igrača, svoj žeton postavlja na centralnosimetrično polje u odnosu na sredinu ploče (takvim postavljanjem je i cijela ploća centralnosimetrična pa je to uvijek moguće učiniti).

   Dakle, drugi igrač će u nekom trenutku ostati bez poteza pa pobjeđuje prvi igrač.

4. a) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n = 4k, k \in \mathbb{N}$, a inače prvi.

   Pokažimo to indukcijom s korakom 4. Baza uključuje provjeru za $n = 1, 2, 3, 4$.

   Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake od $4k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

   Tada ako je broj kamenčića na hrpi na početku $4k+1, 4k+2$ ili $4k+3$, prvi igrač uzme redom 1, 2 ili 3 kamenčića, čime na hrpi ostane $4k$ kamenčića, a po pretpostavci ta pozicija je pobjednička za igrača koji tad nije na redu, dakle za onog koji je prvi uzeo kamenčiće s hrpe.

   Za $n = 4k+4$ prvi igrač ne može uzeti broj kamenčića djeljiv s 4 (jer je to sigurno složen broj), pa će se, štogod odigra, naći u za njega gubitničkoj poziciji.

   b) Provjerom za male n naslućujemo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju za $n \in \{2, 5, 7\}$, a inače prvi.

   Za $n \leq 8$ direktno provjerimo koji igrač ima pobjedničku strategiju.

Pretpostavimo da za neki $k \geq 8$ vrijedi da jedino za $n \in \{2, 5, 7\}$ drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Dokažimo da za $n = k + 1$ prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

Ako je $k + 1$ paran broj, prvi igrač uzme $k - 1$ kamenčić čime ostanu samo 2, pa je to pobjednička pozicija za prvog igrača po pretpostavci indukcije. Inače prvi igrač uzme $k - 4$ ili $k - 6$ kamenčića, ovisno o tome koji od tih brojeva je djeljiv s 4 (čime znamo da je složen), te ostaje 5 ili 7 kamenčića, zbog čega znamo da prvi igrač pobjeđuje.

5. Možemo naslutiti da prvi igrač ima pobjedničku strategiju onda kada je na početku na hrpama različit broj kamenčića, a inače drugi.

Ako je na početku različit broj kamenčića na hrpama, prvi igrač može uzeti kamenčiće s hrpe na kojoj ih se nalazi više, i to tako da izjednači broj kamenčića na obje hrpe.

Igrač koji igra drugi tada mora uzeti kamenčiće s neke od hrpa te će tada broj kamenćića na hrpama ponovno biti različit.

Prvi igrač zatim ponavlja svoju strategiju sve dok na taj način ne uzme i posljednji kamenčić (nakon što je drugi igrač ispraznio jednu od hrpa). Ovo je sigurno moguće s obzirom da se na hrpama nalazi konačan broj kamenčića te se u svakom potezu uzima barem jedan kamenčić.

Ako se pak na početku na hrpama nalazi jednak broj kamenčića, nakon poteza prvog igrača broj kamenčića će sigurno biti različit. Tada se drugi igrač nalazi u poziciji prvog igrača iz prethodnog slučaja te ima već opisanu pobjedničku strategiju.

6. U ovom rješenju nećemo određivati strategiju, već samo dokazati njeno postojanje.

Pretpostavimo da drugi igrač ima strategiju kojom osigurava neriješen ishod ili pobjedu. To znači da, neovisno o potezima prvog igrača, može osigurati neriješen ishod ili pobjedu.

Neka prvi igrač odigra svoja dva poteza nekim skakačem, tako da ga drugim potezom vrati na početnu poziciju. Stanje na ploči je tada isto kao i na početku.

No, drugi igrač je tada u poziciji prvog igrača, a ta pozicija je po pretpostavci gubitnička (odnosno igrač koji tada nije na redu ima pobjedničku strategiju).

Dakle, dobili smo kontradikciju te drugi igrač nema pobjedničku strategiju, odnosno prvi igrač može osigurati neriješen ishod ili pobjedu.

7. Dokažimo da drugi igrač ima pobjedničku strategiju.

Podijelimo ploču u 4 kvadrata dimenzija 4×4, te svaki obojimo u 8 boja (ukupno 32 boje): ako boje označimo brojevima od 1 do 8, retke obojimo redom s (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (2, 1, 4, 3), te (6, 5, 8, 7) (bit je da su 2 po 2 polja obojena istom bojom i da skakač može skočiti u jednom skoku između 2 polja iste boje).

Sada kada prvi igrač stavi skakača na proizvoljno polje, drugi igrač pomakne skakača na preostalo drugo polje te boje u istom kvadratu. Zatim prvi igrač sigurno mora pomaknuti skakača na polje dosad neposjećene boje (ili na polje u drugom kvadratu). Međutim, onda drugi igrač sigurno može pomaknuti skakača na drugo polje te boje, budući da je tek u prethodnom skoku skakač po prvi puta posjetio polje te boje.

Dakle, nakon što prvi igrač odigra potez, drugi igrač će također moći odigrati potez. Stoga će prvi igrač biti prvi koji neće moći napraviti potez.

8. Pretpostavimo da prvi igrač uvijek gubi.

Tada on gubi i ako odlomi samo kockicu u desnom donjem kutu. No, nakon što drugi igrač odigra svoj potez, komad čokolade koji je ostao mogao je ostati i odmah nakon prvog igrača.

Stoga je drugi igrač u gubitničkoj poziciji, no to je nemoguće. Dakle, prvi igrač uvijek ima pobjedničku strategiju.

9. Želimo dokazati da je najmanji takav n jednak 13.

Ako poljima pridružimo oznake (i, j), gdje i označava redak, a j stupac u kojem se nalazi polje, te Anica u crveno oboji polja $(1,1), (2,2), ..., (8,8), (1,8), (2,1), (3,2), (4,3), (5,4)$, Božica ne može nikako prebojati sva crvena polja u crno na dopušteni način. Ostaje pokazati da kako god Anica rasporedi 12 crvenih polja, Božica ih može sve prebojati u crno.

U tu svrhu, uočimo da 4 retka koja imaju najviše crvenih polja moraju sadržavati barem njih 8. Naime, u suprotnom bi jedan od tih redaka imao najviše jedno crveno polje. S druge strane, preostala 4 retka imala bi barem 5 crvenih polja, dakle jedan redak bi imao barem 2 polja. No, tada nismo odabrali 4 retka s najviše crvenih polja, čime dolazimo do kontradikcije.

Sada ta 4 retka Božica preboji u crno, a preostala do 4 crvena polja se očito mogu prebojati odabirom 4 stupca.

10. Pokazat ćemo da Lazo uvijek može namjestiti da nakon njegovog poteza suma ostane djeljiva s p. Naime, podijelimo skup $\mathcal{M}$ u parove oblika $(i, i+p) : i \in \{1, 2, 3, ..., p\}$. Lazo će u svakom svom potezu odabrati drugi broj iz tog para. Ideja je da nakon svaka dva poteza eliminiramo jedan uređeni par, te Lazo na taj način uvijek može odigrati takav potez.

Sada preostaje dokazati da je nakon svaka dva poteza S djeljiv s p. To dokazujemo indukcijom.

Baza indukcije je $S = 0$, što je očito djeljivo s p.

Sada pretpostavimo da je suma nakon k-tog poteza S_k djeljiva s p. Sada je Goci na potezu.

Goci odabire a i sada imamo

$$S_{k+1} = p(a) - S_k.$$

Nakon toga Lazo odabire b takav da su a i b upareni. Tada imamo

$$S_{k+2} = p(b) - S_{k+1} = p(b) - p(a) + S_k.$$

Po pretpostavci indukcije $p \mid S_k$. Preostaje dokazati $p \mid p(b) - p(a)$. Vrijedi $a - b \mid p(a) - p(b)$ (*razmislite zašto*), a po načinu biranja parava imamo da je $a - b = \pm p$ pa je tvrdnja dokazana.

11. *1. slučaj*

n je neparan.

Dokažimo da tada Anica ima pobjedničku strategiju.

Anica u prvom potezu briše prvi broj s lijeve strane, a ostale brojeve dijeli u parove uzastopnih brojeva.

Primijetimo da su dva uzastopna prirodna broja sigurno relativno prosta.

Dakle, Anica ima cilj da nakon njenog zadnjeg poteza ostane točno jedan od ovih parova brojeva.

To i može lako učiniti tako da nakon svakog Božičinog poteza obriše drugi broj iz istog para u kojem se nalazio taj broj.

2. slučaj

n je paran.

Dokažimo da tada Božica ima strategiju.

Primijetimo da dva parna broja sigurno nisu relativno prosta, a Božica će igrati zadnji potez.

Na ploči se nalazi jednako parnih i neparnih brojeva.

Dakle, ako Anica u nekom trenutku obriše neparan broj, Božica pobjeđuje (jer može lako ostvariti da su svi neparni brojevi obrisani, odnosno na ploči ostaju dva parna broja).

Sada, ako Anica briše samo parne brojeve, Božica treba brisati samo neparne brojeve, sve do zadnjeg poteza, kada će na ploči ostati još 3 broja.

Kako je na ploči barem 12 brojeva, među njima su barem 2 neparna koja su djeljiva sa 3, pa Božica, dok briše neparne brojeve, treba za kraj "ostaviti" dva koja su djeljiva sa 3.

Tada u zadnjem koraku briše preostali parni broj, a na ploči su ostala dva neparna broja, oba djeljiva sa 3, čime Božica pobjeđuje.

12. Dokažimo da Božica može ostvariti svoj naum.

Neka Božica napiše brojeve $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2$ (bitno je da se parno mnogo puta ponavlja najveći broj).

Sada lako dokažemo da će se, bez obzira na Aničine poteze, najveći broj uvijek ponavljati parno mnogo puta (promotrite sve slučajeve izbora brojeva).

No, tada je nemoguće postići da su svi brojevi jednaki (naime, tada bi bilo nužno da se najveći ponavlja neparno mnogo puta), pa je dokaz završen.

13. Provjerom malih primjera naslućujemo da Božica pobjeđuje ako je n potencija broja 2.

Ukoliko n nije potencija broja 2, n možemo zapisati u obliku $n = 2^k \cdot m$, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, a m neparan prirodni broj veći od 1.

Anica slijedi ovaj algoritam: prvo Anica makne 2^k novčića, a zatim kad Božica makne $2^{k'} \cdot m'$ kamenčića, Anica makne $2^{k'}$ kamenčića (koliko ih zaista smije uzeti). Uočimo da je $k' \leq k$ (jer Božica može uzeti najviše $2^{k+1} - 1$ kamenčića, te se analogno ovome k' iz poteza u potez neće povećati. Stoga će nakon Aničinog poteza broj kamenčića biti djeljiv s $2^{k'+1}$, a u sljedećem potezu Božica može uzeti najviše $2^{k'+1} - 1$ kamenčića, pa ne može uzeti zadnji. Dakle, Anica će uzeti zadnji kamenčić u ovome slučaju.

Ukoliko je n potencija broja 2, Božica će igrati na isti način kao Anica u gornjem slučaju. Stoga u ovom slučaju Božica ima pobjedničku strategiju.

14. Pokazat ćemo da su traženi n oni koji se mogu prikazati kao zbroj različitih potencija broja 2 s neparnim eksponentima. Na početku uočimo da za neparne n Anica ima pobjedničku strategiju. Naime, prvi broj koji će Božica napisati bit će broj 2 (dakle paran), pa zatim ako Anica stalno dodaje broj 1 prethodnom, Božica će stalno pisati parne, a Anica neparne, pa će Anica biti ta koja će napisati broj n.

Nadalje, dokazujemo sljedeću tvrdnju: Božica ima pobjedničku strategiju za broj n ako i samo ako ima pobjedničku strategiju za $4n$ i $4n+2$. Neka Božica ima pobjedničku strategiju za n. Ona stoga može igrati kao da se igra do broja n, čime će natjerati Anicu da prva napiše broj j koji je veći od n (a on će biti i manji ili jednak od $2n$). Tada Božica napiše $2j$, te je $2n + 2 \leq 2j \leq 4n$. Sada je jedini dopušteni potez povećanje broja za 1, a kako su $2j, 4n$ i $4n + 2$ parni, jasno je da će Božica pobijediti.

Analogno zaključimo da ako Anica ima pobjedničku strategiju za neki n, onda ju ima i za $4n$ i $4n + 2$. Ovi zaključci su dosta da na osnovi ručne provjere za $n = 1, 2, 3, 4$ dokažemo početnu tvrdnju.

19.3. A3: Zvonko Andrijević - KAGH i CSB

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Primijenimo A-G na ova tri člana i dobit ćemo željeni rezultat
2. Razdvojimo a^2 na $\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}$ i slično kao i u primjeru primijenimo A-G i dobijemo željeni rezultat
3. $(x^2+y^2+z^2 9(1+1+1)\geq(x+y+z)^2$ Otkud očito slijedi željena nejednakost
4. $((x+y)+(y+z)+(z+x))$ neka bude jedan, a lijevi izraz nejednakosti drugi izraz za CSB. Tako ćemo dobiti željenu nejednakost.
5. Primijeni A-G na prvu pa na drugu zagradu. I to je to
6. Naime
$$\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}\leq\sqrt{(a+b+c)(a_1+b_1+c_1)}$$
zbog CSB-a. To znači da jednakost vrijedi samo ako su ova dva niza proporcionalna, što drugim riječima zapravo znači da su trokuti slični.
7. $$(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b))(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})\geq(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ac)$$
Odavdje slijedi nejednakost.
8. Nakon raspisivanja dobije se $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{xyz}$. Sad primijenimo A-G pa dobijemo da je to $\geq 1+\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}+\frac{3}{\sqrt[3]{(xyz)^2}}+\frac{1}{xyz}$ što je jednako $(1+\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}})^3$ što je prema A-G $\geq(1+\frac{3}{x+y+z})^3=64$
9. Raspisivanjem uvjeta dobivamo $xy+yz+xz=xyz$. Nakon toga raspisivanjem lijeve strane nejednakosti vidimo da moramo samo pokazati $x+y+z\geq 9$ No, to očito vrijedi po A-H nejednakosti.
10. Po CSB: $(\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)})^2\leq(c+(b-c))((a-c)+c)$. Čime je dokazana željena nejednakost.
11. Jako slično se dokazuje kao i prijašnji zadatak. Ako nisi još pokušao riješiti prijašnji, riješi ga prije nego što nastaviš ovaj.
12. Očito za $x\geq 3$ nejednakost vrijedi pa ćemo zato pretpostaviti $x\leq 3$. Množenjem sa zajedničkim nazivnikom i nakon malo algebarske manipulacije dobivamo $(x-y)(y+1)^2(3-x)\leq 4$. Motivirani da iskoristimo A-G želimo da nam se određene stvari pokrate. Tako ćemo ovo preoblikovati u $(2x-2y)(y+1)^2(6-2x)\leq 16$. Primjenom A-G na ovo dobivamo stvarno da ova nejednakost vrijedi($(y+1)^2$ tretiramo kao dva člana)
13. Državno natjecanje 2001., 1.razred
14. Zapiši sve pod korijenom.Tako će svaki član biti zapravo na kvadrat. Sada spari članove i^2 i $(2n-i)^2$ i na njih primjeni A-G. Otud bi trebalo biti očito da nejednakost vrijedi.
15. IMO 1995, Problem 2
16. Državno natjecanje 2002., 1.razred
17. Državno natjecanje 1999.,1.razred
18. Državno natjecanje 2022., 2.razred

19.4. N3: Dario Vuksan - Kongruencije

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Potencije broja 2 promatrane mod 10 ponavljaju se ciklički: $2, 4, 8, 6$. Zaključujemo da je tražena znamenka 6.

2. Za prost p: $(x-y)(x+y) \equiv 0 \mod p$ pa je $x \equiv y$ ili $x \equiv -y \mod p$. Nije nužno $x \equiv y \mod p$. Protuprimjer: $4^2 \equiv 1^2 \mod 5$, ali $4 \not\equiv 1 \mod 5$.

3. Svaki prirodni broj se može zapisati kao $3k$ ili $3k+1$ ili $3k+2$. Kvadriranjem tih izraza dobijemo $9k^2$, $9k^2+6k+1$, $9k^2+12k+1$ pa zaključujemo da su mogući ostatci $0, 1$ pri dijeljenju kvadrata s 3. Na isti način odredimo za 4 (ostatci $0, 1$) i za 8 (ostatci $0, 1, 4$).

4. $9 \equiv 1 \mod 8$ pa jasno $9^k \equiv 1^k \mod 8$. Za b) dio zadatka, promotrimo broj zapisan kao zbroj potencija baze 10. Vrijedi $10 \equiv 1 \mod 3$, pa npr. za broj $\overline{abcde}$ imamo

$$a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0 \equiv a + b + c + d + e \mod 3$$

5. Svaki prirodan broj se može zapisati kao $6n+r$, gdje je $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Ako je $r = 0, 2, 4$, broj je paran. Ako je $r = 3$, broj je dijeljiv s 3. Za proste brojeve preostaju samo $r = 1$ i $r = 5$.

6. Promatranjem jednadžbe modulo osam dobijemo kongruenciju $x^2 + y^2 \equiv 7 \mod 8$. Pozivajući se na Zadatak 3. zaključimo da ne postoje takvi cijeli brojevi, dakle, jednadžba nema rješenja.

7. $3^{2n+1} = 3 \cdot 3^{2n} = 3 \cdot (3^2)^n = 3 \cdot 9^n \equiv 3 \cdot 2^n \mod 7$. Drugi pribrojnik zapišemo kao $4 \cdot 2^n$ i tvrdnja zadatka jasno slijedi.

8. Promotrimo modulo 3: broj p^2 može davati ostatak 0 ili 1. Ako daje ostatak 1, tada je $8p^2 + 1 \equiv 8 + 1 \equiv 0 \mod 3$. Ako je prost broj djeljiv s 3, onda je taj broj 3, ali to ovdje očito nije moguće $(8p^2 + 1 = 3)$. Dakle, p^2 daje ostatak 0 pri dijeljenju s 3 i jedini takav prost p je 3. Provjerimo: $8 \cdot 3^2 + 1 = 73$, prost broj. $p = 3$ je jedini mogući p.

9. Ako je $p \equiv 1 \mod 3$, tada je $2p + 1 \equiv 0 \mod 3$ složen broj (očito je veći od 3). Ako je $p \equiv 2 \mod 3$, tada je $4p + 1 \equiv 0 \mod 3$ složen broj. Preostaje provjeriti $p \equiv 0 \mod 3$, tj. $p = 3$, $2p + 1 = 7$,$4p + 1 = 13$, sve su prosti brojevi. Jedini takav p je 3.

10. Ciklus za potencije broja 7 modulo 10 je $7, 9, 3, 1$. Nas sada zanima ostatak koji daje ovaj eksponent pri dijeljenju s 4. Budući da je $7 \equiv -1 \mod 4 \implies 7^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 3 \mod 4$. Dakle, posljednja znamenka je 3.

11. Promotrimo modulo 8. Za $x \geq 3$ je $0 \equiv 3^y - 5 \equiv 3^y + 3 \mod 8$. Potencije broja 3 daju ostatke 1 i 3, a nama treba 5 što je nemoguće. Preostaje ručno provjeriti $x = 1$ i $x = 2$. Nalazimo jedino rješenje: $(x, y) = (2, 2)$.

12. $3^n - 2 \equiv 0 \mod 3^n - 2 \iff 3^n \equiv 2 \mod 3^n - 2$. Dodajemo 1 s obje strane pa potenciramo na n: $(3^n + 1)^n \equiv 3^n \equiv 2 \mod 3^n - 2$

13. Ciklus potencija broja 3 modulo 10 je $3, 9, 7, 1$. $33 \equiv 1 \mod 4$ pa je zadnja znamenka 3.

14. Po slučajevima: $n \equiv 0 \implies 0$, $n \equiv 1 \implies 1$, $n \equiv 2 \implies 0 \mod 3$, nikad 2.

15. Za $n = 2k$ dobijemo $n^2 + 2n - 1 = 4k^2 + 4k - 1 \equiv 3 \mod 4$. Za $n = 2k + 1$ dobijemo $4k^2 + 4k + 1 + 4k + 2 - 1 \equiv 2 \mod 4$. U oba slučaja to nije djeljivo s 4.

16. Primijetimo da je ovo zbroj 25 kvadrata, od kojih 8 su višekratnici broja 3. Ostalih 17 je kongruentno 1 modulo 3, stoga je čitav zbroj kongruentan 2 modulo 3 pa zaključimo da nije kvadrat.

17. Vrijedi $x^3 \equiv x$ za modulo 2 i 3. Ta dva modula su relativno prosta pa vrijedi i $x^3 \equiv x \pmod 6$. Tvrdnju zadatka dobivamo tako da uzmemo $x = a, b, c$ pa zbrojimo tri kongruencije.

18. Uočimo da je n^2 djeljivo sa 7, to je moguće samo ako je i n djeljiv sa 7. Uzmemo $n = 7k$ pa jednadžba postane $49k^2 - 7m^2 = 28 \iff 7k^2 - m^2 = 4$ i promatranjem toga modulo 7 zaključimo $m^2 \equiv 3 \pmod 7$ što je nemoguće jer su ostatci kvadrata pri dijeljenju sa 7 ovi: $0, 1, 2, 4$.

19. $37 \equiv 2 \pmod 7$, pa je $37^{n+2} \equiv 2^{n+2} \pmod 7$. Slično za ostale. Izraz modulo 7 je: $2^{n+2} + 2^{n+1} + 2 = 2^n(4 + 2 + 1) = 7 \cdot 2^n$ što je djeljivo sa 7.

20. Postoji prirodan k takav da vrijedi $ab + 1 = k(b + 2) = kb + 2k$. Iz te jednadžbe dobijemo $b(a - k) = 2k - 1 > 0$ (jer je k prirodan), pa zaključimo $a > k$. Iz iste nejednakosti dodatno vrijedi $2k - 1 \geq b$, odnosno $2k > b$. Konačno: $a > k \iff 2a > 2k > b$.

21. Promotrimo modulo 3: $2^b \equiv (-1)^b \pmod 3$, a zadana jednadžba je $0 - (-1)^b \equiv 2 \pmod 3$. Jedina mogućnost je da je b paran. Neka je $b = 2t$. Sada uzmemo modulo 4: $3^a \equiv (-1)^a \equiv 2021 \equiv 1 \pmod 4$. Odavde zaključimo da je a paran. Neka je $a = 2s$. Sada imamo $3^a - 2^b = 3^{2s} - 2^{2t} = 9^s - 4^t$. Za $t > 1$ promatranjem modulo 8 vrijedi $1 \equiv 5 \pmod 8$ što nije moguće, a za $t = 1$ imamo $3^a = 2025$, što nije potencija broja 3. Dakle, jednadžba nema rješenja.

22. Ako su oba veća od 2, njihov zbroj je paran i veći od 2. Uzmimo da je $p = 2$, q mora biti neparan. Sada imamo $p^{2q} + q^{2p} = 2^{2q} + q^4 = 4^q + q^4$. Ako je $q \neq 5$, tada je $q^4 \equiv 1 \pmod 5$ i imamo: $4^q + q^4 \equiv (-1)^q + 1 \equiv 0 \pmod 5$ (jer je q neparan broj), ali to onda ispadne višekratnik broja 5. Preostaje ručno provjeriti $4^5 + 5^4 = 1649 = 17 \cdot 97$, nije prost broj. Ne postoje traženi prosti brojevi.

23. Ako je $m \geq 2$, tada je $6^m \equiv 0 \pmod 4$, a cijeli izraz je $2^n + 2 \pmod 4$, kako bi bio kvadrat jedino je moguće $n = 1$ jer kvadrati ne mogu biti kongruentni 2 modulo 4. Preostaje naći m takve da je $6^m + 4$ kvadrat nekog prirodnog broja. Promotrimo modulo 7: $6^m \equiv (-1)^m \pmod 7$. Ovisno o parnosti broja m, $6^m + 4$ može biti 3 ili 5 modulo 7, ali u oba slučaja to nikako nije kvadrat prirodnog broja.
Preostaje provjeriti $m = 1$, odnosno $2^n + 8$ je kvadrat prirodnog broja. Za $n \geq 4$ je $2^n + 8 \equiv 8 \pmod{16}$, a kvadrati ne mogu biti 8 mod 16. Provjerimo ručno $n = 1, 2, 3$ i nađemo samo jedan par prirodnih brojeva: $(m, n) = (1, 3)$.

Izvor: Državno 2009. SŠ 3. razred A varijanta 1. zadatak

Napomena: Ako za prikaz PDF-a koristite internetski preglednik, npr. Chrome ili Firefox, oni će ga otvoriti na pravoj stranici pa nije potrebno *scrollati* po dokumentu.

24. Školsko 2021. SŠ 3. razred A varijanta 7. zadatak

25. Državno 2020. SŠ 3./4. razred A varijanta 5. zadatak

26. Županijsko 2022. SŠ 4. razred A varijanta 3. zadatak

27. Juniorska balkanska matematička olimpijada - shortlistani zadaci NT 1.

28. Državno 2014. SŠ 2. razred A varijanta 3. zadatak

29. Državno 2007. SŠ 3./4. razred A varijanta 1. zadatak

30. Justin Stevens - *Olympiad Number Theory through Challenging Problems* Primjer 2.3.4

Za pravilo djeljivosti s 11, promatramo broj kao zbroj potencija u bazi 10, kao u Zadatku 4.b i iskoristimo činjenicu $10 \equiv -1 \mod 11$. Očito, za parne potencije to postaje plus, dok za neparne potencije ostaje minus. Pravilo glasi: broj je djeljiv s 11 ako i samo ako je suma znamenki alternirajućih predznaka djeljiva s 11, počevši s desna na lijevo: $602603474 \longrightarrow 4-7+4-3+0-6+2-0+6=0$ što je djeljivo s 11, dakle i početni broj je djeljiv s 11.

19.5. X3: Zvonko Andrijević - Invarijante i monovarijante

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Gledajući parnost vidimo da će broj jabuka uvijek biti paran. Znači nikad neće biti 5

2. Obojimo ploču crno-bijelim bojanjem. Vidimo da je broj bijelih i crnih pločica u našoj konfiguraciji gdje smo oduzeli dva kuta različit. S obzirom na to da svaka domino pločica zauzima jednak broj bijelih i crnih polja, ovo popločavanje je nemoguće

3. Vidimo da je zbroj sva tri broja invarijanta. S obzirom da se krajnji zbroj do kojeg želimo doći razlikuje od početnog, nemoguće je doći do njega.

4. Invarijanta je zbroj $a + b$. Ne mijenja se, što znači da je nemoguće izvesti ovu transformaciju jer su početni i krajnji zbroj drugačiji.

5. Rasporedimo vrhove u dvije skupine tako da su svi neparni vrhovi u jednoj, a svi parni u drugoj skupini. Vidjet ćemo da naša operacija u vijek djeluje na oba skupa, što znači da se ukupni zbroj tog skupa svaki put poveća za jedan. Da bi svi brojevi bili ikad jednaki, na početku bi zbrojevi oba skupa trebali biti jednaki što oni nisu bili.

6. Vidimo da se broj glava mijenja svaki put za višekratnik broja 7. To znači da se ostatak broja glava pri dijeljenju 7 nikad ne mijenja. S obzirom da on na početku nije bio jednak 0, neće nikad ni biti.

7. Gledamo sustav ostatak pri dijeljenju 3. Naime, vidimo da na početku svaka boja daje drugačiji ostatak pri dijeljenju 3. To znači da oni čine kompletni sustav ostataka modulo 3. svakom transformacijom taj sustav ostaje kompletan(isprobajte sami provodeći par transformacija). Ovo znači da nikad nećemo imati sve kameleone jedne boje jer onda bi dvije boje dale ostatak 0 pri dijeljenju 3, a to je nemoguće jer onda ne bi činile kompletan sustav ostataka.

8. Opet ćemo koristit crno-bijelo bojanje. Ako prebrojimo početni broj crnih i bijelih polja koje zauzimaju žetoni te konačni broj koji bi trebali zauzimati, vidjet ćemo da on nije jednak. Svakom transformacijom broj crnih i bijeli polja koje zauzimaju žetoni se ne mijenja. Znači nemoguće je doći do željene konfiguracije

9. Problem 31

10. Problem 32

11. Znači označimo svaki redak i stupac brojevima od 1 do 15. Ako bismo označili svaku poziciju koju zauzima neki top s (x, y) i zbrojili sve te koordinate za sve topove, dobili smo 240. To je uvjet koji mora biti ostvaren da se nijedan top ne bi napadao. Kada neki top napravi potez, možemo vidjeti da mu se promijeni parnost zbroja koordinata (slobodno isprobajte to sami). To znači da se promijeni i parnost zbroja svih koordinata. S obzirom na to da 15 topova napravi potez, to znači da će se parnost promijeniti 15 puta tj. bit će drugačija nego na početku. Ali to znači da naš uvjet neće biti zadovoljen pa će morati postojati barem dva topa koja se međusobno napadaju.

12. Prvo spojimo sve dužine nasumično. Ako ne postoji nijedne dvije koje se sijeku onda smo gotovi. Ako postoje neke dvije koje se sijeku. Onda "raspetljajmo" te dvije dužine tako da se više ne sijeku. Tako smo dobili dvije nove dužine čiji je zbroj duljina manji od početnog "zapetljanog" zbroja. Tako nastavimo ovaj algoritam dok ne dođemo do konfiguracije s minimalnim ukupnim

zbrojem dužina. Tada znamo da ne postoji nijedne dvije dužine koje se sijeku jer inače bismo mogli ponoviti ovaj algoritam i dobiti još manji zbroj dužina što je u kontradikciji s pretpostavkom da je ovaj minimalan.

13. Problem 43

14. Ovdje ćemo gledati najveći zajednički djelitelj oba člana. Vidimo da je u početku on jednak 1. To znači da je nemoguće doći do konfiguracije pod a) jer u njoj je najveći zajednički djelitelj jednak 19, a s obzirom na to da se svakom transformacijom nzd ne mijenja, onda je ovo očito nemoguće. Za konfiguraciju pod b) S obzirom na to da je i ovdje nzd jednak 1, mogli bismo pretpostaviti da je moguće doći do te konfiguracije, i stvarno zapravo je. Ovo ostavljam vama da se malo poigrate i dođete do (19,96)

15. Problem 9

16. Gledajmo umnožak sljedbenika svih članova. Vidimo da je on invarijanta. Očito je onda zapravo da će zadnji član biti jednak umnošku sljedbenika svih početnih članova -1, a jasno je i otud da upravo zbog toga je nebitno kojim redoslijedom radimo transformacije.

17. Problem 30

18. Državno natjecanje 2012. 3.razred

19. Problem 28

20. Promatramo koliko ima brojeva koji imaju trenutnu maksimalnu vrijednost. Neka je Jerry napisao dvije dvojke i sedam jedinica. To znači da je na početku broj maksimalnih brojeva paran. On nikad ne može postati neparan. Zašto?. Zato što ako bismo kreirali broj s maksimalnom vrijednošću od dva broja koja već imaju maksimalnu vrijednost, onda bi sigurno ta nova vrijednost bila veća nego bilo koji drugi broj, ali s obzirom da dva broja imaju tu vrijednost opet imamo parnost. Ako bismo istu stvar pokušali s dva broja koja su manja od trenutno najvećih brojeva opet bidmo dobili dvije ili već postojeće maksimalne vrijednosti, što ne mijenja parnost ili dvije nove, što je opet parno. Zadnji slučaj transformacije pomoću jednog broja koji ima maksimalnu i jednog koji nema ostavljam vama. nakon ovog je očito da ne možemo imati 9 brojeva s maksimalnom vrijednošću, iliti ne možemo ostavriti ono što smo htjeli.

21. Example 8

22. Lagano se pokaže da ako su p i q racionalni i različiti od 0 onda je i $p \odot q$ isto racionalno. Tada treba uočiti jednu malo težu stvar za vidjeti, a to je da vrijedi $a \odot b = 1 \odot \frac{b}{a}$. Tako smo rješenje s ove dvije činjenice sveli na to da ako je za neki racionalni r, $1 \odot r$ cijeli broj tada je taj cijeli broj jednak 2. Uz još par obzervacija i slučajeva lagano se pokaže da stvarno jedini način da bude cijeli broj jest ako je jednak 2.

23. IMO 1993

24. Example 9

20. Rješenja za četvrtu grupu

20.1. G4: Marko Hrenić - Trig smash

Predavanje Hintovi Rješenja

Izvori

1. Primjenom sinusovog poučka na trokut ABM dobivamo

$$\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle ABM} = \frac{BM}{AM}.$$

Slično, primjenom sinusovog poučka na trokut AMC dobivamo

$$\frac{\sin\angle CAM}{\sin\angle ACM} = \frac{CM}{AM}.$$

Budući da je $BM = CM$ iz prethodne dvije relacije direktno dobivamo tvrdnju zadatka.

2. Zbog vanjske simetrale kuta $\angle BAC$ imamo da je $\angle EAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Budući da je četverokut $AEBC$ tetivan, znamo da je $\angle AEB = 180^\circ$. Kombiniranjem dobivenih veličina kuteva dobivamo $\angle ABE = \frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ$, odnosno primjenom sinusovog poučka

$$|AE| = 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ\right).$$

Ponovnom primjenom sinusovog poučka (sada u trokutu $\triangle AFE$) dobivamo

$$\begin{aligned} |AF| &= |AE|\sin\frac{\alpha}{2} \\ &= 2R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ\right)\sin\frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Tvrdnja zadatka sada postaje ekvivalentna sljedećoj (zbog $|AB| = 2R\sin\gamma$ i $|AC| = 2R\sin\beta$):

$$4R\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \gamma - 90^\circ\right)\sin\frac{\alpha}{2} = 2R(\sin\gamma - \sin\beta).$$

Kraćenjem s $2R$ i supstitucijom $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$ dolazimo do izraza

$$2\sin\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\gamma - \sin\beta$$

kojeg je sada lako pokazati korištenjem adicijskih formula. Budući da smo tako pokazali izvedenu ekvivalentnu tvrdnju, pokazali smo i tvrdnju zadatka.

3. Da bismo dokazali tvrdnju zadatka dovoljno je dokazati $QB = DP$. Označimo $\angle CDB = \alpha$ i $\angle DCA = \beta$. Iz sinusovog poučka na trokute DAP i QBC imamo

$$DP = AD \cdot \sin\alpha \qquad \text{i} \qquad QB = BC \cdot \sin\beta. \tag{20.1}$$

Budući da je $ABCD$ tetivan i AC je promjer opisane kružnice, vrijedi

$$AD = 2R \cdot \sin\beta \qquad \text{i} \qquad BC = 2R \cdot \sin\alpha \tag{20.2}$$

pa iz (20.1) i (20.2) slijedi $DP = QB$.

4. 2018 županijsko 3.razred

5. 2006 županijsko 3.razred
Drugo rješenje:
Sinusov poučak na AC i CB:

$$\frac{5}{\sin 3\alpha} = \frac{4}{\sin\alpha} = 2R$$

Raspis, raspis sinusa trostrukog kuta, riješiti kvadratnu za $\sin\alpha$ i dobi se $\sin\alpha$ iz čega dalje sve slijedi kao u službenom rješenju

6. 2010 županijsko 3.razred

7. 2015 drzavno 3.razred

8. BiH federalno takmicenje 2021.

9. 2017 županijsko 3.razred

10. 1996 USAMO Problems, problem 5

11. SMO 2012, open round 2 task 1

12. 2020 državno 3.razred

13. 2009 drzavno 3.razred

14. HMO 2025., 3.dan

15. državno 2017, 3A, 4. zadatak
Skica drugačijeg rješenja:
Označimo sa A' sjecište visine iz vrha A i kružnice opisane trokutu ABC. Zbog

$$GM \parallel HK \iff \triangle HKA' \sim \triangle GMD \iff \frac{HA'}{A'K} = \frac{GD}{DM}$$

dovoljno je pokazati $\dfrac{HA'}{A'K} = \dfrac{GD}{DM}$.

Iz prethodnih zadataka i primjera znamo

$$|HD| = 2R\cos\beta\cos\gamma$$
$$|BH| = 2R\cos\beta.$$

Primjenom sinusovog poučka na trokut ABA' dobivamo $|BA'| = 2R\sin(90^\circ - \beta) = 2R\cos\beta$ pa zbog sličnosti trokuta zaključujemo

$$|HA'| = 2|HD| = 4R\cos\beta\cos\gamma.$$

Osim toga, zbog $\angle DAM = \beta - \gamma$ imamo $|A'K| = 2R\sin(\beta - \gamma)$.

Nadalje računamo $|DM| = |DC| - |MC|$. Iz trokuta AMC dobivamo

$$MC = b\frac{\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)},$$

iz čega slijedi

$$|DM| = b\left(\cos\gamma - \frac{\cos\beta}{\cos(\gamma-\beta)}\right).$$

U računanju $|GD| = |AD| - |AG|$ koristimo trokut AGF i tetivnost četverokuta $AEHF$ (nasuprotni pravi kutevi). Iz sinusovog poučka imamo

$$\frac{|AF|}{\sin(90^\circ+\beta-\gamma)} = \frac{|AG|}{\sin\gamma},$$

odnosno imamo

$$|AG| = \frac{b\cos\alpha\sin\gamma}{\cos(\gamma-\beta)}$$
$$|AD| = b\sin\gamma = c\sin\beta.$$

Spajanjem svih dobivenih izraza i korištenjem adicijskih formula dobivamo tvrdnju zadatka.

16. IMO 2008
Primijetimo da je dovoljno pokazati da su točke A_1, A_2, C_1 i C_2 konciklične (leže na istoj kružnici), a ostatak tvrdnje će direktno slijediti iz toga. Tvrdnju ćemo pokazati koristeći potenciju točke B, odnosno želimo pokazati $|BA_1|\cdot|BA_2| = |BC_1|\cdot|BC_2|$.

Neka je M polovište stranice $\overline{BC}$ i D nožište visine iz vrha A. Za početak imamo neka trivijalna opažanja iz uvjeta zadatka i polovišta stranice:

$$|BM| = |MC| = \frac{a}{2}$$
$$|A_1M| = |HM| = |A_2M|$$
$$|BA_1| = |BM| - |A_1M|$$
$$|BA_2| = |BM| + |A_2M|$$

iz čega slijedi

$$|BA_1|\cdot|BA_2| = |BM|^2 - |A_1M|^2 = |BM|^2 - |HM|^2$$

pa primjenom Pitagorinog poučka ($|HM|^2 = |HD|^2 + |DM|^2$) dobivamo izraz koji trebamo izračunati:

$$|BM|^2 - |HD|^2 - |DM|^2 = ?$$

Budući da znamo $|BM| = \frac{a}{2}$, ostaje nam izračunati preostale 2 duljine u traženom izrazu.

Trokuti BDH i BCF (za F nožište visine iz B) su pravokutni pa imamo

$$|HD| = |BD|\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2R\cos\beta\cos\gamma.$$

Osim toga vidimo i da je

$$|DM| = |BM| - |BD| = \frac{a}{2} - 2R\sin\gamma\cos\beta = R\left(\sin\alpha - 2\sin\gamma\cos\beta\right).$$

Uzmemo li u obzir sve izračunate veličine, raspisivanjem algebarskih izraza dobivamo

$$|BA_1|\cdot|BA_2| = 4R^2(\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta - \cos^2\beta),$$

a analogno isto dobivamo i za $|BC_1|\cdot|BC_2|$ čime smo pokazali tvrdnju zadatka.

17. EMC 2021 J2

18. BMO 2007

20.2. C4: Simeon Stefanović - Nesigurna prebrojavanja

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Pecivo se može izabrati na 3 načina, šunka na 6 načina (bez šunke ili sa jednom od vrsta), a sir na 5 načina. Dakle rješenje je, prema principu umnoška, $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.

2. S obzirom da će u svakom retku i svakom stupcu biti po točno jedan top, u prvom retku ga možemo postaviti na 8 načina, u drugom na 7... i u zadnjem na 1 način tako da je rješenje $8!$.

3. Osobu koja će osvojiti kekse možemo izabrati na 15 načina. Zatim, prvu osobu koja će osvojiti sok možemo izabrati na 15 načina, a drugu na 14, no kako poredak tih osoba nije bitan, ukupni broj načina za izabrati 2 osobe koje osvajaju sok je $\frac{15 \cdot 14}{2}$, s obzirom da smo svaki par osoba prethodno brojali 2 puta. Dakle, rješenje je $\frac{15 \cdot 15 \cdot 14}{2}$.

4. Brojeva manjih od 1000 i djeljivih sa 3 je 333, a djeljivih sa 7 je 142. Broj je djeljiv i sa 3 i sa 7 ako i samo ako je djeljiv sa 21, a takvih manjih od 1000 ima 47 pa je po FUI rješenje $333 + 142 - 47 = 428$.

5. Svih peteroznamenkastih brojeva ima 90000, a onih koji nemaju znamenku 5 ima $8 \cdot 9^4$. Dakle, peteroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 5 ima $90000 - 8 \cdot 9^4$.

6. Ako broj šahista označimo s x, a broj penzionera s y, iz uvjeta zadatka vrijedi da je broj ljudi koji su i šahisti i penzioneri jednak:

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{3}$$
$$\implies 3x = 4y$$
$$\implies x > y$$

Dakle, u tom društvu ima više šahista nego penzionera.

7. Županijsko natjecanje 2019., SŠ A-4.3.

8. Među 15 učenika imamo $\binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2}$ različitih parova.

   Svaki dan, među 3 učenika koja čiste učionicu, pojavljuju se točno 3 različita para.

   Dakle, kako svaki par zajedno čisti učionicu točno jednom, broj parova učenika jednak je i $3 \cdot k$.

   Imamo $3k = \frac{15 \cdot 14}{2}$, odnosno $k = 35$.

9. (a) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

   S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe, a s desne strane broj odabira osoba koje ne biramo u ekipu (drugim riječima, izabrali smo sve osim onih koje želimo imati u ekipi) te time izabrali i ekipu. Na taj smo način prebrojali istu stvar.

   (b) Promatrajmo n osoba te od njih biramo ekipu od k osoba.

   S lijeve strane prikazan je broj mogućih odabira takve ekipe.

   S druge strane, fiksirajmo jednu osobu.

   Ako je ta osoba u ekipi, preostale članove ekipe biramo na $\binom{n}{k-1}$ načina. Inače, članove ekipe biramo na $\binom{n}{k}$ načina (s obzirom da se fiksirana osoba ne nalazi u ekipi). Na taj smo način prebrojali istu stvar.

(c) Birajmo k-članu ekipu te njenog kapetana.

To upravo možemo napraviti na $k\binom{n}{k}$ načina.

S druge strane, ako prvo izaberemo kapetana, a zatim preostale članove ekipe, to možemo napraviti na $n\binom{n-1}{k-1}$ načina.

(d) Biramo bilo koji broj ljudi (između 0 i n) od n ljudi.

S druge strane, to je jednako broju 2^n, s obzirom da svaku osobu možemo izabrati ili ne izabrati (te primjenjujemo princip produkta).

(e) Između n osoba radimo uži izbor od m osoba, a zatim među njima biramo tim od r osoba.

S druge strane, prvo biramo tim od r osoba, a zatim preostale osobe koje su bile u užem izboru (drugim riječima, namjestili smo izbor tima i prvo izabrali tim, a zatim prikazali tko je još bio u užem izboru :)).

(f) Biramo ekipu od k osoba, a zatim predsjednika i podpredsjednika, koji mogu biti i jedna te ista osoba.

S druge strane, raspišemo li izraz s desne strane, dobivamo

$$(n+n^2)\cdot 2^{n-2} = (n+n+n\cdot(n-1))2^{n-2} = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

što je jednaku zbroju načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao istu osobu (i preostale članove između ostalih ljudi) i načina da prvo izaberemo predsjednika i potpredsjednika kao različite osobe (i zatim preostale članove između ostalih ljudi).

10. Azra Tafro, Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje, 3. zadatak

Ideja rješenja je izračunati zbroj brojeva na ploči zbrajanjem po pravokutnicima, a ne po poljima. Drugim riječima, za svaki pravokutnik na ploči treba odrediti koliko doprinosi zbroju brojeva na ploči, a to je jednako njegovoj površini. Preostaje odrediti tu sumu koja je oblika

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} ij\cdot(n-i+1)(n-j+1))$$

11. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 8. zadatak

12. Krenimo od desne strane jednakosti.

Desna strana jednakosti predstavlja broj $k+1$-članih podskupova $n+1$-članog skupa.

Neka je naš skup oblika $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$.

S lijeve strane promatrajmo koji je prvi element (s najmanjim indeksom) koji je izabran. Ako je prvi izabrani element x_i, preostale elemente možemo izabrati na $\binom{n-i}{k}$ načina.

Dakle, lijeva strana je upravo suma broja načina izbora podskupova za svaki izbor prvog elementa, pa predstavlja istu stvar kao i desna strana.

13. Županijsko natjecanje 2013., SŠ A-4.3.

14. Ilko Brnetić, Prebrojavanje, 10. zadatak

15. Za početak promatrajmo broj permutacija vozila, odnosno redoslijed kojim će biti parkirana. Takvih permutacija ima 10!.

Zatim fiksirajmo redoslijed vozila te njima pridružimo parkirna mjesta. Prvo između svaka dva vozila postavimo po jedno parkirno mjesto. Preostalo je još 21 neupotrijebljenih parkirnih mjesta od kojih svako možemo postaviti na 11 lokacija u odnosu na automobile, a to možemo promatrati kao kombinaciju s ponavljanjem te napraviti na $\binom{31}{10}$ načina.

Zato je traženi broj rasporeda $\binom{31}{10}\cdot 10!$

Primijetite kako je navedeni način prebrojavanja ispravan s obzirom da ne razlikujemo parkirna mjesta, već samo njihov broj i položaj u odnosu na automobile (što je ekvivalentno početnom problemu raspoređivanja automobila).

16. Državno natjecanje 2018. SŠ A-2.5.
17. Državno natjecanje 2016. SŠ A-4.5.
18. Državno natjecanje 2001., SŠ-A 4.4

20.3. A4: Dario Vuksan - Teleskopiranje

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Označimo sa S traženu vrijednost. Rastavom na parcijalne razlomke dobijemo jednakost:

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

Sumiramo za $k = 1, 2, \ldots, 98$. Izlučimo polovinu i promotrimo što se poništava:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{98} - \frac{1}{100}\right)$$

Preostaje:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \boxed{\frac{14651}{19800}}$$

2. Slično kao u prethodnom zadatku, samo što ovdje sumiramo neparne $n = 1, 3, 5, \ldots, 99$:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} + \frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101}\right) = \boxed{\frac{50}{101}}$$

3. Imamo $1 - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k}$ za $k = 2, 3, \ldots, 50$. Promotrimo produkt:

$$\frac{2-1}{2} \cdot \frac{3-1}{3} \cdot \frac{4-1}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{49-1}{49} \cdot \frac{50-1}{50}$$

Krate se svi brojnici osim prvog i svi nazivnici osim posljednjeg. Dakle, rješenje je $\boxed{\frac{1}{50}}$

4. Imamo $\frac{k^2}{k^2-1} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k}{k+1}$ za $k = 2, 3, \ldots, 98$. Promotrimo dva produkta, jedan kojeg sačinjavaju lijevi faktori općenitog člana, drugi kojeg sačinjavaju desni:

$$\prod_{k=2}^{98} \frac{k^2}{k^2-1} = \left(\prod_{k=2}^{98} \frac{k}{k-1}\right) \cdot \left(\prod_{k=2}^{98} \frac{k}{k+1}\right)$$

U lijevom prežive prvi nazivnik 1 i posljednji brojnik 98, dok u drugom prežive prvi brojnik 2 i posljednji nazivnik 99. Rezultat je $\frac{98 \cdot 2}{1 \cdot 99} = \boxed{\frac{196}{99}}$

5. Vrijedi:

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)k!} = \frac{k+1}{(k+1)k!} - \frac{1}{(k+1)k!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Sumiranjem tih izraza dođemo do konačnog rješenja: $\boxed{1 - \frac{1}{100!}}$

6. Raspišemo danu jednakost za svaki prirodan broj od 1 do n:

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1(1+1)}{2} - \frac{1(1-1)}{2} \\
2 &= \frac{2(2+1)}{2} - \frac{2(3-1)}{2} \\
3 &= \frac{3(3+1)}{2} - \frac{3(3-1)}{2} \\
&\vdots \\
n-1 &= \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \\
n &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

Sumirajmo sve te jednakosti. Svi se pribrojnici na desnoj strani ponište osim drugog u prvoj jednakosti (koji je nula) i prvog u posljednjoj jednakosti. Dakle:

$$1 + 2 + \ldots + n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

7. Općeniti član zapišemo u teleskopirajućem obliku:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$$

Prežive samo prvi i posljednji član pa je suma jednaka:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

U zadatku imamo $n = 98$ i tada je rezultat $\boxed{\dfrac{4949}{19800}}$

8. Imamo općeniti član:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$$

Svaki faktor teleskopiramo zasebno:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} &= \frac{1}{n}, \\
\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} &= \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Konačno, pomnožimo ih pa je rješenje $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

9. Racionaliziramo nazivnik za općeniti član:

$$\frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$$

Teleskopiranjem dobijemo konačno rješenje $\boxed{\sqrt{n+1} - 1}$

10. Raspišemo općeniti član:

$$\frac{k-\sqrt{k^2-1}}{\sqrt{k(k-1)}}=\frac{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\cdot\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\cdot\sqrt{k-1}}=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}}-\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}$$

Suma se teleskopira u: $\boxed{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}}$

11. a) Faktoriziramo nazivnik pa rastavimo na parcijalne razlomke:

$$\frac{k}{k^4+k^2+1}=\frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right)$$

Uočimo da vrijedi $A_k=k^2+k+1 \implies A_{k-1}=(k-1)^2+(k-1)+1=k^2-k+1$, zaključimo da je to upravo zapis u teleskopskom obliku koji tražimo. Konačno, tražena suma jednaka je

$$\boxed{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)}$$

b) Za opći član vrijedi $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$ Teleskopiranjem prvog razlomka od $k=2$ do n dobijemo $\frac{2}{n(n+1)}$. Za drugi iskoristimo činjenicu iz a) dijela zadatka. Konkretno:

$$\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\frac{A_k}{A_{k-1}}$$

Odavde uočimo da se krate svi osim prvog nazivnika i posljednjeg brojnika. Za ovaj faktor ostane $\frac{n^2+n+1}{3}$. Ne zaboravimo da k počinje od 2!
Time dolazimo do konačnog rješenja:

$$\boxed{\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}}$$

12. Da bismo rastavili na parcijalne razlomke, stupanj brojnika mora biti strogo manji od stupnja nazivnika. To ćemo postići tako da podijelimo razlomak:

$$\frac{k^2+1}{k^2-1}=\frac{k^2-1+2}{k^2-1}=1+\frac{2}{k^2-1}=1+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Ovih jedinica ima $n-1$ zato što k ide od 2 do n, a što se tiče izraza u zagradi, dva uzastopna se teleskopiraju (u ovom dugačkom izrazu namjerno su izostavljene jedinice):

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Uočimo da prežive samo $\frac{1}{1},\frac{1}{2},-\frac{1}{n},-\frac{1}{n+1}$ stoga je konačno rješenje:

$$\boxed{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

13. Jednostavno rastavimo na parcijalne razlomke:

$$\frac{2}{4k^2-1}=\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}$$

pa se suma teleskopira u $\boxed{1-\frac{1}{2n+1}}$

14. Prepoznajemo općeniti član:

$$\frac{2k-1}{2^k k!} = \frac{2k}{2^k k!} - \frac{1}{2^k k!} = \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} - \frac{1}{2^k k!}$$

Tražena suma je $\boxed{1 - \frac{1}{2^n n!}}$

15. Imamo $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$. To možemo preurediti u $F_{k-1} = F_k - F_{k-2}$ i to ćemo iskoristiti za sve članove počevši od drugog:

$$\begin{aligned}
F_1 &= F_1 \\
F_2 &= F_3 - F_1 \\
F_3 &= F_4 - F_2 \\
F_4 &= F_5 - F_3 \\
&\vdots \\
F_{n-3} &= F_{n-2} - F_{n-4} \\
F_{n-2} &= F_{n-1} - F_{n-3} \\
F_{n-1} &= F_n - F_{n-2} \\
F_n &= F_{n+1} - F_{n-1}
\end{aligned}$$

Sumiranjem tih jednakosti uočimo koji se poništavaju:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = F_n + F_{n+1} - F_2 = \boxed{F_{n+2} - 1}$$

16. U Primjeru 1. smo imali $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$. Ovdje ćemo koristiti $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$. Ponovno sumiramo te jednakosti za $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$\begin{aligned}
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1 \\
&\vdots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n+1)^3 - \ n^3 &= 3n^2 + 3n + 1
\end{aligned}$$

Sumiramo sve to. Na lijevoj strani ostane $(n+1)^3 - 1$, a na desnoj dobijemo $3T_n + 3S_n + n$ gdje je S_n suma prvih n prirodnih brojeva (formulu uzmemo iz Primjera 1.), a T_n suma prvih n kvadrata prirodnih brojeva koju sada trebamo izraziti iz ove jednakosti:

$$(n+1)^3 - 1 = 3T_n + 3S_n + n$$

$$T_n = \frac{(n+1)^3 - 3S_n - n - 1}{3}$$

Uvrštavanjem S_n i sređivanjem lako dođemo do poznatog izraza $\boxed{T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Alternativno rješenje koristeći čisto teleskopiranje:

Tražimo teleskopski niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ takav da je $b_k - b_{k-1} = k^2$. Pretpostavimo $b_k = Ak^3 + Bk^2 + Ck$, slobodni koeficijent nije bitan jer se ionako poništi. Imamo:

$$\begin{aligned} b_k - b_{k-1} &= Ak^3 + Bk^2 + Ck - A(k-1)^3 - B(k-1)^2 - C(k-1) \\ &= Ak^3 + Bk^2 + Ck - A(k^3 - 3k^2 + 3k - 1) - B(k^2 - 2k + 1) - C(k-1) \\ &= \cancel{Ak^3} + \cancel{Bk^2} + \cancel{Ck} - \cancel{Ak^3} + 3Ak^2 - 3Ak + A - \cancel{Bk^2} + 2Bk - B - \cancel{Ck} + C \\ &= 3Ak^2 + (2B - 3A)k + A - B + C = k^2 \end{aligned}$$

pa imamo:

$$\begin{aligned} 3A &= 1 \\ 2B - 3A &= 0 \\ A - B + C &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje sustava je $(a, b, c) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$. Konačno teleskopiramo sumu:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \ldots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0$$

Znamo da je $b_0 = 0$ i $b_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

17. Slično kao u prethodnom zadatku: $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$. Sumiranjem za $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$(n+1)^4 - 1 = 4U_n + 6T_n + 4S_n + n$$

U_n je zbroj kubova prvih n prirodnih brojeva.

$$U_n = \frac{(n+1)^4 - 6T_n - 4S_n - n - 1}{4}$$

Sređivanjem tog izraza dolazimo do

$$U_n = S_n^2 = \boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

18. Pomnožimo sve s $3 - 2$ (što je jednako 1):

$$\begin{aligned} &(3-2)(2+3)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{2^n}+3^{2^m}\right) \\ &= (3^2-2^2)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{2^n}+3^{2^m}\right) \\ &= (3^4-2^4)\left(2^4+3^4\right)\ldots\left(2^{2^n}+3^{2^m}\right) \\ &\vdots \\ &= \boxed{3^{2^{n+1}} - 2^{2^{n+1}}} \end{aligned}$$

19. Iskoristimo da je

$$k \cdot k! = (k+1-1)k! = (k+1)! - k!$$

Odavde teleskopiranjem dobivamo rješenje $\boxed{(n+1)! - 1}$

20. Ideja je zapisati $(k^2 + k + 1)k!$ kao $A_k k! - A_{k-1}(k-1)!$. Možemo npr. pretpostaviti da je A_k kvadratni polinom (tj. $A_k = ak^2 + bk + c$). Slijedi prezentiran postupak:

$$\begin{aligned}
(k^2+k+1)k! &= A_k k! - A_{k-1}(k-1)! \qquad \Big/ \frac{1}{(k-1)!}\\
(k^2+k+1)k &= A_k k - A_{k-1}\\
k^3+k^2+k &= \left(ak^2+bk+c\right)k - \left(a(k-1)^2+b(k-1)+c\right)\\
k^3+k^2+k &= \left(ak^3+bk^2+ck\right) - \left(a(k^2-2k+1)+b(k-1)+c\right)\\
k^3+k^2+k &= \left(ak^3+bk^2+ck\right) - \left(ak^2-2ak+a+bk-b+c\right)\\
k^3+k^2+k &= ak^3+(b-a)\,k^2+(2a-b+c)\,k+(-a+b-c)
\end{aligned}$$

Ova jednakost vrijedi za svaki k pa izjednačavanjem koeficijenata izvučemo sustav:

$$\begin{aligned}
a &= 1\\
b-a &= 1\\
2a-b+c &= 1\\
-a+b-c &= 0
\end{aligned}$$

koji ima rješenje $(a,b,c)=(1,2,1)$ pa je $A_k = k^2+2k+1 = (k+1)^2$. Zapišimo opći član koristeći to:

$$(k^2+k+1)k! = (k+1)^2k! - k^2(k-1)!$$

Teleskopiranjem sume dobijemo:

$$\boxed{(n+1)^2n!-1}$$

ili ekvivalentno $(n+1)(n+1)!-1$

21. Započnemo rješavanje kao u prethodnom zadatku, samo što ovdje neće raditi kvadratni polinom nego kubični: $A_k=(k-1)(k+1)(k+2)$ u faktoriziranom obliku.

$$\begin{aligned}
k^2(k+1)! &= A_k k! - A_{k-1}(k-1)!\\
&= (k-1)(k+1)(k+2)\cdot k! - (k-2)k(k+1)\cdot(k-1)!\\
&= (k-1)(k+2)! - (k-2)(k+1)!
\end{aligned}$$

Sumiranjem svih članova od 1 do n dobijemo konačno rješenje:

$$\boxed{(n-1)(n+2)!+2}$$

22. Dokažimo da ova nejednakost vrijedi za sve pozitivne realne x:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > 2\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$$

Racionalizacijom razlike slijedi:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Stoga je gornja nejednakost ekvivalentna s:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\\
\iff &\sqrt{x+1}+\sqrt{x} > 2\sqrt{x}\\
\iff &\sqrt{x+1} > \sqrt{x}
\end{aligned}$$

što očito vrijedi jer je korijen rastuća funkcija.

Sumiranjem za $x=1,2,\ldots,n$ dobivamo traženu nejednakost.

23. a) Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = 1 + 1 + \ldots + 1 = \boxed{n + 1}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1+x+x^2+\ldots+x^n)}{1-x} = \frac{1-x+x-x^2+x^2-x^3+\ldots+x^n-x^{n+1}}{1-x} =$$

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

b) Za $x = 1$ vrijedi

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \boxed{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

Za $x \neq 1$ možemo danu sumu pomnožiti i podijeliti s $1 - x$, što znači da je ona jednaka

$$\frac{(1-x)(1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n)}{1-x} =$$

$$= \frac{1-x+2x-2x^2+3x^2-3x^3+\ldots+(n+1)x^n-(n+1)x^{n+1}}{1-x}$$
$$= \frac{1+x+x^2+\ldots+x^n}{1-x} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}$$

Sada možemo iskoristiti rezultat iz a) dijela zadatka, pa je dana suma jednaka

$$\boxed{\frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)x^{n+1}}{1-x}}$$

24. Označimo sa S traženu sumu.

Koristit ćemo trigonometrijski identitet za transformaciju umnoška u zbroj:

$$2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

Uzmemo $B = 0.5°$ i posumiramo za $k = 1, 2, \ldots, 180$:

$$2\sin 0.5° \sin k° = \cos(k° - 0.5°) - \cos(k° + 0.5°)$$

$$\begin{aligned} 2\sin 0.5° \cdot S = {} & (\cos(1° - 0.5°) - \cos(1° + 0.5°)) \\ & + (\cos(2° - 0.5°) - \cos(2° + 0.5°)) \\ & + \ldots \end{aligned}$$

Desna strana teleskopira i ostane

$$2\sin 0.5° \cdot S = \cos 0.5° - \cos 180.5° = 2\cos 0.5°$$

(koristili smo $\cos 180.5° = -\cos 0.5°$) pa slijedi $S = \cot 0.5° = \boxed{\tan 89.5°}$

25. Transformiramo opći član u produktu:

$$1 + \frac{1}{a_k} = \frac{a_k + 1}{a_k} = \frac{a_{k+1}}{(k+1)a_k}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti iskoristili zadanu rekurziju $\frac{a_n}{n} = a_{n-1} + 1$ za $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) &= \frac{a_2}{2a_1} \cdot \frac{a_3}{3a_2} \cdot \frac{a_4}{4a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n+1}}{(n+1)a_n} \\
&= \frac{a_{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)(a_n+1)}{(n+1)!} \\
&= \frac{a_n+1}{n!} \\
&= \frac{a_n}{n!} + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{n(a_{n-1}+1)}{n!} + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{a_{n-1}+1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

Primjenom istog postupka eventualno dođemo do

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{a_k}\right) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Posljednji član je $\frac{a_1}{(1-1)!} = 1$

26. Označimo lijevu stranu jednakosti sa S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} kn^{n-k} \frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

Konstantu možemo izlučiti iz sume:

$$S_n = (n-1)! \sum_{k=1}^{n} \frac{kn^{n-k}}{(n-k)!}$$

Obrnut ćemo poredak kojim zbrajamo članove:

$$j = n - k \implies k = n - j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$S_n = (n-1)! \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-j)n^j}{j!}$$

Sada možemo razdvojiti na dvije sume. Iz prve ćemo izlučiti n:

$$S_n = (n-1)! \left(n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{jn^j}{j!} \right)$$

Drugu sumu transformiramo. Dodatno, stavit ćemo $j = 1$ jer je za $j = 0$ pribrojnik nula.

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{jn^j}{j!} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^j}{(j-1)!} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n \cdot n^{j-1}}{(j-1)!} = n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!}$$

Vratimo nazad:

$$S_n = (n-1)! \left(n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} - n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!} \right) = (n-1)! \cdot n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{n^j}{j!} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n^{j-1}}{(j-1)!} \right)$$

Razlika dvaju suma teleskopira i ostane $\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$. Uvrštavanjem dobivamo:

$$S_n = (n-1)! \cdot n \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^n$$

što je trebalo dokazati.

20.4. N4: Mislav Plavac - MFT i Euler

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. AoPS jer se nikom neda ovo pisat
2. Primijenjujemo Eulerov teorem za sve tri kongruencije:

$$\phi_{(11)} = 10, \phi_{(25)} = 20, \phi_{(39)} = 24$$

$$2^{10} \equiv 1 \mod 11 \implies 2^{100} \equiv 1 \mod 11$$
$$2^{20} \equiv 1 \mod 25 \implies 2^{100} \equiv 1 \mod 25$$
$$2^{24} \equiv 1 \mod 39 \implies 2^{96} \equiv 1 \mod 39 \implies 2^{100} \equiv 16 \mod 39$$

3. Za brojeve veće ili jednako 999 vrijedi $999 \equiv -1 \mod 1000$
Slijedi:

$$9 \times 99 \times 999 \times \ldots 999 \equiv 9 \times 99 \times (-1)^{997} \mod 1000$$
$$9 \times 99 \times (-1) \equiv -871 \equiv 129 \mod 1000$$

4. Zapišimo izraz preko kongruencija: $29^p + 1 \equiv 0 \mod p$
S obzirom da $p \neq 29$ prema malom Fermatu vrijedi $29^p \equiv 29 \mod p$
kombiniranjem to dva izraza dobije se:

$$30 \equiv 0 \mod p$$

Očito p pripada skupu:$\{2, 3, 5\}$ Provjerom se dobije $p = 2, 3, 5$

5. Služit ćemo se Eulerovim teoremom. $\phi_{(49)} = 42$.

$$6^{42} \equiv 1 \mod 49 \implies 6^{84} \equiv 1 \mod 49$$
$$8^{42} \equiv 1 \mod 49 \implies 8^{84} \equiv 1 \mod 49$$

Sada samo treba izračunati $6^{-1} \mod 49$ i $8^{-1} \mod 49$. Dobije se:

$$6^{84}6^{-1} + 8^{84}8^{-1} \equiv 6^{83} + 8^{83} \equiv 35 \mod 49$$

6. Po Malom Fermatovom teoremu znamo da je $4^6 \equiv 1 \pmod 7$, pa nam je dovoljno pronaći ostatak koji eksponent (a_{99}) daje pri dijeljenju sa $\varphi(7) = 6$.
a_{99} je djeljiv sa 2. Ostaje nam još pronaći a_{99} modulo 3. Iskoristimo ponovno Mali Fermatov teorem.

$$a_{99} = 4^{a_{98}} \equiv 4^{2\cdot k} \equiv (4^{\varphi(3)})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod 3,$$

za neki k (prva kongruencija vrijedi jer je a_{98} paran). Znamo $a_{99} \equiv 0 \pmod 2$ i $a_{99} \equiv 1 \pmod 3$, iz čega zaključujemo $a_{99} \equiv 4 \pmod 6$.
Sada imamo

$$a_{100} = 4^{a_{99}} = 4^{6l+4} \equiv (4^{\varphi(7)})^l \cdot 4^4 \equiv 1^l \cdot 4^2 \cdot 4^2 \equiv 2 \cdot 2 = 4 \pmod 7,$$

za neki l. Dakle, rješenje je 4.

7. Slično kao i u prošlom zadatku, po Malom Fermatovom teoremu rješenje će biti $6^{4!^{\cdots^{2019!}}} \pmod{\varphi(11)}$ $\pmod{11}$. Pronađimo traženi ostatak pri dijeljenju sa $\varphi(11) = 10$. Zapravo nas zanimaju ostatci pri dijeljenju sa 2 i 5. Eksponent $24^{120^{\cdots^{2019!}}}$ je djeljiv sa 2. Nadalje,

$$24^{120^{\cdots^{2019!}}} \equiv 24^{4k} \equiv (24^{\varphi(5)})^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{5}$$

jer $4 \mid 120$ i 24 i 5 su relativno prosti. Kombiniranjem tih ostataka dobivamo $24^{120^{\cdots^{2019!}}} \equiv 6 \pmod{10}$. Zato kao rješenje imamo

$$3!^{4!^{\cdots^{2019!}}} \equiv 6^6 \equiv (6^2)^3 \equiv 36^3 \equiv 3^3 \equiv 27 \equiv 5 \pmod{11}$$

8. Zbog Malog Fermatovog teorema imamo $4^p + 5^p \equiv 9 \mod p$ stoga $p \mid 9$ te $p = 3$.

9. Imamo $5^{p^2} + 1 = (5^p)^p + 1 \equiv 5^p + 1 \equiv 5 + 1 \equiv 6 \mod p$. Stoga su moguća rješenja $p = 2$ i $p = 3$ i provjerom slijedi da je $p = 3$ jedino rješenje.

10. Kako je $x^p \equiv x \mod p$ imamo $a^p \equiv b^p \mod p \implies a \equiv b \mod p$ te također imamo $a^p - b^p = (a-b)(a^{p-1} + a^{p-2}b + \ldots + ab^{p-2} + b^{p-1})$. Kako p dijeli prvu zagradu, dovoljno je pokazati da dijeli i drugu, a to je očito jer se ona sastoji od zbroja p brojeva koji su svaki kongruentni a^p mod p.

11. Zadani uvjet djeljivosti možemo zapisati i pomoći kongruencija kao

$$2^{2^n+1} + 2 \equiv 0 \pmod{17}$$

iz čega slijedi i

$$2^{2^n} + 1 \equiv 0 \equiv 17 \pmod{17}$$

jer su 2 i 17 relativno prosti. Odavde imamo i

$$2^{2^n} \equiv 16 = 2^4 \pmod{17},$$

odnosno

$$2^{2^n-4} \equiv 1 \pmod{17}.$$

Promotrimo li redom ostatke koje 2^k daje pri dijeljenju sa 17, za $k \in \mathbb{N}$, možemo zaključiti da je taj ostatak jednak 1 za $k \equiv 0 \pmod{8}$. Dakle, tražimo n takve da $2^n - 4 \equiv 0 \pmod{8}$. Dijeljenjem kongruencije sa 4 dobivamo $2 \mid 2^{n-2} - 1$, što očito nije moguće za $n > 2$. Provjerom $n = 1$ i $n = 2$ zaključujemo da je $n = 2$ traženo rješenje.

12. 250 problema elementarne teorije brojeva, 5

13. 250 problema elementarne teorije brojeva, 16

14. Olympiad number theory, primjer 2.3.10

15. (a) Dovoljno je promatrati proste brojeve $p = 4k+3$. Imamo $x^2 \equiv -1 \mod p \implies (x^2)^{2k+1} \equiv -1 \mod p$ što je nemoguće po Malom Fermatovom teoremu.

(b) Primijetimo da x mora biti neparan broj jer bi inače y^2 bio oblika $4k+3$. Jednadžba je ekvivalentna s $y^2 + 1 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$. Kako prema prethodnom zadatku broj $y^2 + 1$ ne smije imati djelitelja oblika $4k+3$, promatrajući prvu zagradu desne strane dobivamo da je x oblika $4k+1$, ali uvrštavajući to u drugu zagradu vidimo da je ona upravo oblika $4k+3$ što znači da dana jednadžba nema rješenja.

(c) $4mn - m - n = x^2 \implies (4m-1)(4n-1) = (2x)^2 + 1$ što je u kontradikciji s prvim zadatkom.

16. $p > 3 \implies$ p je neparan, pa je i p+2 neparan, a p+1 je paran. $x = 1^{p+2} + 2^{p+2} + \cdots + (p-1)^{p+2} = 1^{p+2} + (p-1)^{p+2} + 2^{p+2} + (p-2)^{p+2} + \cdots (\frac{p-1}{2})^{p+2} + (\frac{p+1}{2})^{p+2} = (1+p-1)(1-(p-1)+(p-1)^2 \ldots - (p-1)^p + (p-1)^{p+1}) + (2+p-2)(2^{p+1} - 2^p(p-2) + \ldots - 2(p-2)^p + (p-2)^{p+1}) + \ldots + (\frac{p-1}{2} + \frac{p+1}{2})((\frac{p-1}{2})^{p+1} \ldots (\frac{p+1}{2})^{p+1}) = p(\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (p-k)^{p+1-i} \cdot (-1)^i)$

$y = \frac{x}{p} = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (p-k)^{p+1-i} \cdot (-1)^i) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k^i \cdot (-k)^{p+1-i)} \cdot (-1)^i) \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} (k)^{p+1} \cdot (-1)^{p+1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{i=0}^{p+1} k^{p+1} \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (p+1)k^{p+1} \pmod p$ Svi k-evi su relativno prosti s p, pa možemo primijeniti MFT:

$y \equiv \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k^2 \equiv (\frac{p-1}{2})(\frac{p-1}{2} + 1)(p) \equiv 0 \pmod p$

Dokazali smo da je y djeljiv s p, a $x = py$, pa je x djeljiv s p^2.

17. IMO 2005, 4

20.5. X4: Mislav Brnetić - Princip ekstrema

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. MNM online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 4.
2. Andrej Dujella, Uvod u teoriju brojeva, Teorem 1.12
3. MNM online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 6.
4. MNM online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 10.
5. Arthur Engel, Problem solving strategies, The Extremal Principle, Example E6.
6. Arthur Engel, Problem solving strategies, The Extremal Principle, Example E11.
7. MNM online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 15.
8. Arthur Engel, Problem solving strategies, The Extremal Principle, Example E3.
9. Arthur Engel, Problem solving strategies, The Extremal Principle, Example E14.
10. MNM online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 7.
11. MNM online predavanja, Princip ekstrema, Zadatak 3.
12. Arthur Engel, Problem solving strategies, The Extremal Principle, Example E10.

21. Rješenja za petu grupu

21.1. G5: Karla Pogelšek - Homotetija i spiralna sličnost

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Lakši zadaci:

1. Kada se nađe pripisana kružnica onda je tvrdnja zadatka poznata lema o pripisanim kružnicama koje smo prošli na početku predavanja.
2. izvor
3. izvor

Teži zadaci:

1. izvor
2. izvor
3. izvor
4. izvor
5. izvor
6. IMO 2024

21.2. C5: Emanuel Bajamić - Teorija grafova

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Neko županijsko zadnjih 10 godina, indukcija ga svakako ubije.
2. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-SS-zupanijsko-1234-zad+rj/ ZUP 2021, 3.5
3. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-drz-1234-AB-zad+rj/ DRZ 2011, 1.5
4. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2017/2017-SS-drz-1234-AB-zad+rj/ DRZ 2017, 2.5
5. https://natjecanja.math.hr/hjmo-hmo-hmod/hmo/hmo-arhiva/ HMO 2017 IMO test, P2
6. https://natjecanja.math.hr/hjmo-hmo-hmod/hmo/hmo-arhiva/ HMO 2024 IMO test, P2
7. https://www.imo-official.org/problems/IMO2021SL.pdf ISL 2021 C4
8. Konstrukcija lagana, $k = \lfloor log_2(n) \rfloor + 1$. Vrhovi su krugovi. U retku poveži crveni krug sa oba kruga ispod njega, bijele krugove lijevo od crvenog sa lijevim krugom ispod njega i desne sa desnim. ovo daje binarno stablo. Napravimo restrikciju na crvene krugove. Njih je n i svaki ima maksimalno dvoje djece pa je maksimalna dubina barem $\lfloor log_2(n) \rfloor + 1$.
9. https://www.imo-official.org/problems/IMO2023SL.pdf ISL 2023, C4
10. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2021-notes.pdf IMO 2021, P6

21.3. A5: Mislav Plavac - Funkcijske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Napomena. Za realan broj x, sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo najveći cijeli broj k takav da je $k \leq x$, a a $\{x\}$ označavamo decimalni dio, tj. $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

1. Uočavamo da je $1-(1-x) = x$ te umjesto svakog x uvrštavamo $1-x$. Dobivamo jednadžbu
$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2x^2 - 2$$
Promatrajmo ovu jednadžbu i početnu.
$$f(x) + xf(1-x) = 2x^2 - 4x$$
$$f(1-x) + (1-x)f(x) = 2x^2 - 2$$
Dobili smo sustav jednadžbi za $f(x)$ i $f(1-x)$. Pomnožimo drugu jednadžbu s $-x$ i zbrojimo s prvom.
$$f(x) + (x^2 - x)f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 2x$$
$$(x^2 - x + 1)f(x) = (-2x)(x^2 - x + 1)$$
Kako je $x^2 - x + 1 \neq 0$ za sve realne x možemo podijeliti jednadžbu s tim te dobivamo $f(x) = -2x$. Uvrštavanjem se lako vidi da to je rješenje.

2. Uvrstimo li $x = 0$ dobivamo $f(0)f(y) = y + 1$. Ne može vrijediti $f(0) = 0$ pa mora biti $f(x) = \dfrac{x+1}{c}$ za neki $c \in \mathbb{R}$. Direktnim uvrštavanjem dobivamo $c = 1$, odnosno $f(x) = x + 1$.

3. Uvrštavanjem $y = 0$ te korištenjem injektivnosti dobivamo $f(x) = x$.

4. Uvrstimo li $x = -2y$ dobivamo da je f konstanta. Lako se dobije da je $f(x) = 0$ ili $f(x) = \dfrac{1}{5}$ za sve realne x.

5. Uvrstimo li $x = k \in \mathbb{Z}$ dobivamo $kf(k) = kf(0)$, a uzmemo li $x \in (0,1)$ dobivamo $xf(x) = \{x\}f(0) = xf(0)$. Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u početnu jednadžbu dobivamo
$$xf(x) = \lfloor x \rfloor f(\{x\}) + \{x\}f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor f(0) + \{x\}\ f(0) = xf(0)$$
Dakle, f je proizvoljna realna konstanta.

6. Lako vidimo da je f injekcija. Nadalje pretpostavimo da je x t.d. $f(f(x)) = 0$ tada je $f(x) = -x$ odnosno $f(-x) = x$ a iz $f(f(x)) = 0$ onda je $f(-x) = 0$ pa $x = 0$. Alternativno, kad smo pokazali da je injekcija smo mogli odmah uvrstiti $x = 0$ i pozvati se na injektivnost.

7. Uvedimo supstituciju: $g(x) = x(f(x) - x)$
Jednadžba postaje
$$g(x) + g(y) = g(x+y)$$
Budući da je domena od $g(x)$ skup racionalnih brojeva poznato je da je $g(x) = cx$
$$x(f(x) - x) = cx$$
$$f(x) - x = c, \quad \forall x \neq 0$$
Ako uvrstimo $f(x) = x + c$ za x različit od 0 vidimo da funkcija zadovoljava uvjet pa je konačno rješenje:
$$f(x) = x + c_1, \quad \forall x \neq 0$$
$$f(0) = c_2$$
Gdje su c_1 i c_2 proizvoljni racionalni brojevi.

8. Nakon supstitucije, imamo

$$bf(a) - af(b) = ab(a^2 - b^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Uvrštavanjem $a = 0$ dobivamo $f(0) = 0$. Nadalje, za $ab \neq 0$, dijeljenjem obje strane s ab dobivamo

$$\frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2$$

Dakle, $f(a) = a^3 + ca$, gdje je c neka konstanta. Uvrštavanjem vidimo da je to rješenje za svaki $c \in \mathbb{R}$.

9. Uzmemo li $y \in \mathbb{Z}$ i $x \in (0, 1)$ jednadžba postaje

$$f(xy) = f(0)$$

Kako svaki realan broj možemo dobiti iz takvih x, y zaključujemo da je f bilo koja konstanta funkcija.

10. Uvrstimo li $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 1$. Uvrštavanjem $y = 1$ dobivamo

$$f(x) + f(1) = f(x+1) + 2f(x) - 1 \iff f(x+1) + f(x) = f(1) + 1$$

Induktivno dobivamo $f(2k) = 1, f(2k+1) = f(1) \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

11. Skica rješenja: Ako nije $f(1) = 1$ nemamo gdje 1 stavit jer f strogo raste, induktivno se izgradi da mora biti $f(n) = n$.

12. Funkcija je očito bijekcija. Neka je $f(c) = 0$ za neki c. Uvrstimo sad prvo $x = 0$ pa $x = c$. Usporedbom te dvije jednadžbe injektivnost daje $f(0) = 0$. Sada imamo $f(f(x)) = x$, pa uvrstimo $f(x)$ umjesto x. Desna strana ostaje nepromijenjena, odakle slijedi

$$f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y))$$

te iz injektivnosti dobivamo $f(x)^2 = x^2$ za sve x. Pretpostavimo sada da za neke $0 \neq a \neq b \neq 0$ vrijedi $f(a) = a$ i $f(b) = -b$. Uvrstimo $x = a$ i $y = b$ pa dobivamo

$$f(a^2 - b) = a^2 + b$$

, no kako je $f(x) = \pm x$ ovo daje kontradikciju. Sada možemo provjerit da su rješenja jednadžbe $f(x) = x$ za sve x ili $f(x) = -x$ za sve x.

13. Državno 2016. 4. r.

14. RMM shortlist 2019. Uvrstimo li $b = 0$ te redom $a = a, a = -a$ dobijemo $f(0) = 0$. Nadalje, uvrštavanjem $a = 0$ dobivamo $f(f(b^2)) = b^2 \quad \forall b \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem $b = -a$ dobivamo $f(a^2) = af(a)$, a uvrštavanjem $a = -\frac{f(b^2)}{b}$ dobivamo $f(b)f(b^2) = b^3$ odnosno $f(b)^2 = b^2$. Pretpostavimo da postoje $a, b \neq 0$ takvi da je $f(a) = a, f(b) = -b$. Uvrstimo li te a, b u početnu jednadžbu dobivamo kontradikciju. Dakle, jedina rješenja su $f(x) = x, f(x) = -x$. Provjerom vidimo da su to zaista rješenja.

15. Skica rješenja: Lako se vidi da je f surjekcija. Nadalje f višekratnike broja 5 šalje u sve brojeve koji su veći ili jednaki 2026. Kako je domena $\mathbb{N}$ mora i brojeve koji nisu djeljivi s 5 negdje preslikati, a zbog injektivnosti mora u skup $\{1, 2, \dots, 2025\}$ što je nemoguće jer bismo trebali injektivno preslikati beskonačno mnogo brojeva u konačan skup.

16. AoPS rješenje korisnika Tintarn

17. HMO 2015 MEMO test 1. zadatak

18. HMO 2010 1. dan 1. zadatak

19. Indian Team Selection Test 2015 Day 2 Problem 2

20. IMO 2010. P1

21. Neka je $P(a, b)$ označava uvrštavanje $x = a, y = b$ u početnu jednadžbu. Tvrdimo da je $f(0) = 0$. Iz $P(1, 1)$ dobivamo da postoji fiksna točka, tj. $a \in \mathbb{Q}$ t.d. $f(a) = a$, a iz $P(-1, -1)$ dobivamo da postoji $b \in \mathbb{Q}$ t.d. $f(b) = -b$. Sada za iste te a, b iz $P(a, y)$, $P(b, y)$ redom dobivamo $f(y + a^2) = f(y) + a^2$ i $f(y - b^2) = f(y) + b^2$ te induktivno $f(y + na^2) = f(y) + na^2$ i $f(y - mb^2) = f(y) + mb^2$ za $m, n \in \mathbb{N}$.

Sada pretpostavimo da je $ab \neq 0$, tada, jer su $a, b \in \mathbb{Q}$ postoje $m, n \in \mathbb{N}$ t.d. je $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{m}{n} \iff na^2 - mb^2 = 0$. Nadalje imamo

$$f(x) = f(x + na^2 - mb^2) = f(x + na^2) + mb^2 = f(x) + na^2 + mb^2 \Rightarrow na^2 + mb^2 = 0$$

što je kontradikcija. Dakle, $f(0) = 0$.

Dalje, iz $P(x, 0)$ i $P(x, -xf(x))$ dobivamo da je f surjekcija. Stoga, neka je $c \in \mathbb{Q}$ t.d. je $f(c) = 1$ tada $P(c, 0)$ daje $c^2 = 1$. Kako je $f(x)$ rješenje akko je $f(-x)$ rješenje BSO $c = 1$, tj. $f(1) = 1$. Dalje redom imamo

$$\begin{aligned}
P(x, 0) &\implies f(xf(x)) = x^2 \\
P(1, x) &\implies f(x + 1) = f(x) + 1 \\
P(x + 1, y), P(x, f(x) + x + y + 1) &\implies f(f(x) + x + y + 1) - f(y) = 2x + 1 \\
&\implies f(f(x) + x + y) - f(y) = 2x
\end{aligned}$$

Iz zadnje jednakosti također možemo dobiti da je f injekcija. Konačno, neka su $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

$$\begin{aligned}
f(f(x) + f(y) + x + y + z) &= f(f(x) + x + z) + 2y \\
&= f(z) + 2x + 2y \\
&= f(f(x + y) + (x + y) + z) \\
\implies f(x) + f(y) &= f(x + y)
\end{aligned}$$

Dakle, $f(x) = x$ je jedino rješenje. Druga rješenja možeteovdje pronaći. Varijantu s $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ možete vidjeti ovdje.

21.4. N5: Lana Milani - TB funkcijske

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Državno natjecanje 2023., 4. razred, 5. zadatak (http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2023/2023-SS-drzavno-1234-zad+rj.zip)

2. Državno natjecanje 2019., 4. razred, 5. zadatak (http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2019/2019-SS-drzavno-1234-zad+rj.zip)

3. IMO Shortlist 2013., N1 (https://www.imo-official.org/problems/IMO2013SL.pdf)

4. HMO 2020. IMO test (https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2021/01/HMO2020-rje.pdf)

5. USA TSTST 2019., problem 7 (https://web.evanchen.cc/exams/sols-TSTST-2019.pdf)

6. USAMO 2012., problem 4 (https://web.evanchen.cc/exams/USAMO-2012-notes.pdf)

7. IMO Shortlist 2015. N6 (https://www.imo-official.org/problems/IMO2015SL.pdf)

8. IMO Shortlist 2015., N7 (https://www.imo-official.org/problems/IMO2015SL.pdf)

21.5. X5: Karlo Jokoš - Global ideja

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Razmotrimo sljedeće parove: (39 63), (51 51), (49 53). Uočimo da je zbroj brojeva u svim ovim parovima jednak 102. Imamo ukupno 24 takva para, a brojevi 1 i 51 nisu uključeni ni u jedan od ovih parova. Čak i ako su i 1 i 51 među 27 odabranih brojeva, još uvijek moramo odabrati barem 25 od 48 brojeva koji se pojavljuju u tih 24 para. Prema načelu goluba (Pigeonhole Principle), barem jedan od ovih parova mora biti u skupu S, pa dakle postoje dva elementa u skupu S čiji je zbroj 102.

2. Tournament of Towns 2001

3. AIME 1985

4. PAGMO 2022

5. Koreja 2005

6. Odgovor: $\left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil$
Za bound, obojimo zeleno bilo koje polje koje nije u istom retku ili istom stupcu kao m polukraljica. To znaći da imam (barem) $(n-m) \times (n-m)$ ploču (koju dobijemo 'spajanjem' zelenih polja) te, ako bi vrijedila tvrdnja zadatka, svako to zeleno polje mora biti na dijagonali polukraljice. Promotrimo zelene kvadrate u najlijevijem stupcu i najgornjem retku, nijedno od tih polja ne može međusobno biti na istoj dijagonali. Prema tome, potrebno jje barem $2(n-m)-1$ polukraljica (toliko ima zelenih kvadrata, a svaka kraljica doprinosi jednu dijagonalu). Odnosno:
$$m \geq 2(n-m)-1 \implies m \geq \frac{2n-1}{3}$$
Što implicira bound.

7. ISL 2017 C1

8. Rumunjska 2004

9. Označimo svaki vrh kao što je prikazano na slici

(0,0,5)
•
(1,0,4) (0,1,4)
• •
(2,0,3) (1,1,3) (0,2,3)
• • •
(3,0,2) (2,1,2) (1,2,2) (0,3,2)
• • • •
(4,0,1) (3,1,1) (2,2,1) (1,3,1) (0,4,1)
• • • • •
(5,0,0) (4,1,0) (3,2,0) (2,3,0) (1,4,0) (0,5,0)
• • • • • •

Primijetimo odmah koje blagodati nam ovakva reprezentacija daje. Recimo da smo psotavili kraljicu na točke (a_i, b_i, c_i) i (a_j, b_j, c_j). Tada, ako imamo $a_i = a_j$, onda su kraljice postavljene na dijagonali koja ide prema dolje desno, dakle kraljice se napadaju, dakle, to ne možemo imati. Slično tako, ne možemo imati $b_i = b_j$ i $c_i = c_j$. Dakle, sada smo spremni reformulirati zadatak u njegov lakši oblik:

Neka $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N}_0$ za $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$ budu takvi da $a_i + b_i + c_i = N$ i $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$ za bilo koje i i j. Tražimo maksimalnu vrijednost broja M (koji corresponda ukupnom broju kraljica).

Sada slijedi čisti global pristup zadatku za bound.

Ukupan zbroj $a_i + b_i + c_i$ za sve i mora biti

$$\sum_{i=1}^{M}(a_i + b_i + c_i) = MN$$

Nadalje, budući da nam se vrijednosti od a, b, c ne ponavljaju, imamo bound

$$MN = \sum_{i=1}^{M}(a_i + b_i + c_i) \geq 3\sum_{i=1}^{M-1} = \frac{3(M-1)M}{2}$$

Odnosno

$$M \leq \left\lfloor \frac{2}{3}N \right\rfloor + 1$$

Konstrukcije, ovisno o mod 3, su sljedeće:

$N = 3k-1$, $\left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor + 1 = 2k$		
a_i	b_i	c_i
0	$k+1$	$2k-2$
1	$k+2$	$2k-4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$2k$	0
k	0	$2k-1$
$k+1$	1	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k-1$	$k-1$	1

$N = 3k$, $\left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor + 1 = 2k+1$		
a_i	b_i	c_i
0	k	$2k$
1	$k+1$	$2k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	0
$k+1$	0	$2k-1$
$k+2$	1	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$k-1$	1

$N = 3k+1$, $\left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor + 1 = 2k+1$		
a_i	b_i	c_i
0	k	$2k+1$
1	$k+1$	$2k-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	1
$k+1$	0	$2k$
$k+2$	1	$2k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$k-1$	2

10. USAMO 2020/2

11. Engel knjiga - pogljave The Box Principle

12. Hong Kong 2019

13. ISL 2004 C1

14. Napravi se bojanje u 8 boja kao što je prikazano

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Budući da $25 = 8 \cdot 3 + 1$, nekih 4 topova će biti na istoj boji. Budući da nijedan broj u bojanju nije ni u istom retku ni stupcu, postoje 4 topa koji se ne napdaju.

15. IMO 2001/4

16. IMO 1970/6

17. EGMO 2019/5

18. ISL 2010 C5

22. Rješenja za šestu grupu

22.1. G6: Lana Milani - G mix

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Iberoamericam Olympiad 2022. problem 5
2. EGMO 2020., problem 5
3. IMO Shortlist 2024., G4
4. MEMO timsko 2022., problem 6
5. EGMO 2020., problem 3
6. EGMO 2017., problem 6
7. Iran TST 2009., problem 9

22.2. C6: Maša Dobrić - Kombe nabacane lopatom

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Neko županijsko zadnjih 10 godina, indukcija ga svakako ubije.

2. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-SS-zupanijsko-1234-zad+rj/ ZUP 2021, 3.5

3. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2011/2011-SS-drz-1234-AB-zad+rj/ DRZ 2011, 1.5

4. Ako zamislimo skup djelitelja n kao t-dimenzionalni kvadar gdje je t broj različitih prostih djelitelja od n, dovoljno je dokazati da ga možemo ispuniti "zmijicom", što je očito ali se može lako formalizirati indukcijom po t.

5. http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2017/2017-SS-drz-1234-AB-zad+rj/ DRZ 2017, 2.5

6. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2011-notes.pdf IMO 2011, P4

7. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2021-notes.pdf IMO 2021, P5

8. https://natjecanja.math.hr/hjmo-hmo-hmod/hmo/hmo-arhiva/ HMO 2017 IMO test, P2

9. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2017-notes.pdf IMO 2017, P5

10. Konstrukcija lagana, $k = \lfloor log_2(n) \rfloor + 1$. Vrhovi su krugovi. U retku poveži crveni krug sa oba kruga ispod njega, bijele krugove lijevo od crvenog sa lijevim krugom ispod njega i desne sa desnim. ovo daje binarno stablo. Napravimo restrikciju na crvene krugove. Njih je n i svaki ima maksimalno dvoje djece pa je maksimalna dubina barem $\lfloor log_2(n) \rfloor + 1$.

11. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2018-notes.pdf IMO 2018, P3

12. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2011-notes.pdf IMO 2011, P2

13. https://www.imo-official.org/problems/IMO2023SL.pdf ISL 2023, C4

14. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2021-notes.pdf IMO 2021, P6

15. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2016-notes.pdf IMO 2016, P6

16. IMO 2020, P3

17. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2017-notes.pdf IMO 2017, P3

18. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2024-notes.pdf IMO 2024, P3

19. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2025-notes.pdf IMO 2025 P6

22.3. A6: Adrian Grbac Lacković - Funkcije izvodnice

Predavanje Hintovi Rjješenja

Rješenja

Zadaci

Lakši zadaci

1.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (\frac{1}{1-x})' = \sum nx^{n-1}$$
$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum nx^n$$
$$\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \sum n^2 x^{n-1}$$

dakle tražena fja je $x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'$ što se raspiše preko derivacije kvocijenta.

2.

3. $(1+x)^{a+b} = (1+x)^a(1+x)^b \implies \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$

4. Pogledaj hint

Umjereni zadaci

5. Neka je $f(x) = \sum nx^n$ te $g(x) = f(x)^3$, tada je $[x^{17}]g(x)$ upravo broj koji tražimo. Primjetimo da je

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^6} = \frac{f^{(5)}(x)}{5!} = \sum \frac{n(n-1)\dots(n-4)}{5!}x^{n-5} = \sum \binom{n}{5}x^{n-5}$$

Dakle odgovor je $\binom{17+5}{5}$.

6. Neka je $f(x) := (x^2+x^3+x^7+x^9)^n$, sada primjenimo filter korijena iz jedinice da bi dobili

$$\sum_{3|k}[x^k]f(x) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}f(\omega^i)$$

$$f(\omega^i) = ((\omega^2)^i+(\omega^4)^i+(\omega^7)^i+(\omega^9)^i)^n = ((\omega^2)^i+1+(\omega^1)^i+1)^n = \left(\frac{1-\omega^{3i}}{1-\omega^i}+1\right)^n = \begin{cases}1^n & ,i\neq 0\\ 4^n & ,i=0\end{cases}$$

dakle $\sum_{3|k}[x^k]f(x) = \frac{2\cdot 4^n+1}{3}$

7. Neka je $f(x,y) = (1+x)^{2024}(1+y)^{2024}$, tada je $[x^k y^l]f(x,y)$ broj kombinacija gdje je Petru palo k, a Luciji l pisama. Ako u y uvrstimo $\frac{1}{x}$ dobimo da je broj dobrih kombinacija jednak $[x]f(x,\frac{1}{x}) = [x^{2025}](1+x)^{2\cdot 2024}$. Za drugu vjerojatnost definiramo $g(x,y) = (1+x)^{2023}(1+y)^{2025}$ te je traženi broj dobrih kombinacija $[x^0]g(x,\frac{1}{x}) = [x^{2025}](1+x)^{2\cdot 2024}$. Dakle imamo isti broj dobrih kombinacija, preciznije $\binom{2\cdot 2024}{2025}$ te je ukupni broj kombinacija jednak $2^{2\cdot 2024}$ dakle vjerojatnosti su jednake.

Teži zadaci

8. Rješenje.

9. Konstruirajmo funkciju $f(a,b,c,d)$ t.d. je $[a^i b^j c^k d^l]f(a,b,c,d)$ jednak broju riječi s m slova a, n slova b... Neka je $f(a,b,c,d) := (a+b+c+d)^n$, koristimo filter korijena iz jedinice kako bi dobili

$$\sum_{2|i}[a^i]f(a,b,c,d) = \frac{f(1,b,c,d)+f(-1,b,c,d)}{2}$$

to napravimo još jednom da dobimo konačni odgovor

$$\sum_{2|i,j}[a^i b^j c^k d^l]f(a,b,c,d) = \frac{f(1,1,1,1)+f(-1,1,1,1)+f(1,-1,1,1)+f(-1,-1,1,1)}{4} = 4^{n-1}+2^{n-1}$$

10. imo 1995

11. rješenje

22.4. N6: Patrik Cvetek - Polinomi

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Neka je p djelitelj od gcd-a. Onda ako $p \leq n$, slijedi $p \mid p^n - 1$ što je nemoguće. Tako da imamo $p > n$. Promatramo slijedeći polinom u $\mathbb{F}_p[X]$
$$X^n - 1 - (X-1) \cdot (X-2) \cdots (X-n)$$
On je stupnja najviše $n-1$ i ima barem n nultočaka (u $\mathbb{F}_p$) po pretpostavci, tako da je on nulpolinom. Stoga imamo
$$X^n - 1 \equiv (X-1)(X-2)\cdots(X-n) \pmod{p}$$
Proširimo desnu stranu i promatrajmo koeficijent od X^{n-1}: on je jednak
$$-(1+2+\cdots+n) = -\frac{n(n+1)}{2}.$$
S druge strane, jer je $n \geq 2$, koeficijent od X^{n-1} lijeve strane je 0. Tako da
$$p \mid \frac{n(n+1)}{2}.$$
Jer je $p > n$, to implicira $p = n+1$. Stoga, ako je $n+1$ složen imamo gcd je 1. Ako je $n+1 = p$ prost, onda je gcd potencija od p i moramo skužit koja je točno. Očito, p je neparan. Po malom fermatu imamo $p \mid k^n - 1$ za $k = 1, \ldots, n$ tako da ostalo je dokazat da p^2 ne dijeli gcd. Za ovo pretpostavimo radi kontradikcije da $p^2 \mid (p-1)^{p-1} - 1$. Onda,
$$p \mid \frac{(p-1)^{p-1} - 1}{(p-1)^2 - 1} = \sum_{k=0}^{\frac{p-1}{2}-1} (p-1)^{2k} \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p}$$
Što daje kontradikciju i gotovi smo. Gcd je $n+1$ ako je $n+1$ prost i 1 u suprotnom.

2. Polinom je ireducibilan ako je i polinom
$$(X+1)^{p-1} + (X+1)^{p-2} + \cdots + (X+1) + 1$$
ireducibilan. Što se faktorizira kao
$$\frac{(X+1)^p - 1}{(X+1) - 1}$$
Kada proširimo ovaj binom preko binomnom poučka vrlo lako možemo provjeriti da on zadovoljava sve uvjete Eisensteinovog kriterija, stoga je polinom ireducibilan.

3. https://artofproblemsolving.com/community/c6h375193p2070726

4. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1225741p6160566

5. https://artofproblemsolving.com/community/c6h337922p1808245

6. https://artofproblemsolving.com/community/c6h1664161p10570981

7. https://artofproblemsolving.com/community/c6h49788p315649

8. https://artofproblemsolving.com/community/c6h3069481p27703501

9. https://artofproblemsolving.com/community/c6h355799p1932945

10. https://artofproblemsolving.com/community/c6h546191p3160608

11. https://artofproblemsolving.com/community/c6h3610457p35340935

23. Rješenja za MEMO grupu

23.1. C8: Emanuel Bajamić - Poseti

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Neka je $f(x)$, $x \in S$ najveći broj takav da postoji lanac duljine $f(x)$ kojem je x najmanji element. Primjetimo da je $m = max(f(x), x \in S)$ maksimalna veličina lanca. Također primjetimo da je $A(n) = \{x \in S \mid f(x) = n, n \leq m\}$ antilanac za svaki takav n. Unija od m antilanaca $A(1), \ldots, A(m)$ pokriva S. Pretpostavimo da postoji $n-1$ ili manje antilanaca čija unija pokriva S. Tad se prema dirichletu barem dva elementa nekog antilanca nalaze na najdužem lancu, kontradikcija.

2. https://dgrozev.wordpress.com/2020/12/25/imo-2020-problem-4-chains-and-antichains/ IMO 2020, P4

3. Napravimo poset gdje $a < b$ ako $max(a) < min(b)$. Tad se u lancu nikoja dva ne sijeku, a u antilancu svaka dva sijeku u jednoj točki, a poznata (i lako dokaziva činjenica je da tad postoji točka gdje se svi sijeku. Preostaje dokazati da je veličina maksimalnog lanca ili veličina maksimalnog antilanca barem $n + 1$.

4. Doslovno samo Mirsky.

5. https://en.wikipedia.org/wiki/Erd

6. https://en.wikipedia.org/wiki/Dilworth

7. https://web.evanchen.cc/exams/IMO-2025-notes.pdf IMO 2025 P6

23.2. A: Karlo Jokoš - Idejaste funkcijske jednadžbe

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

1. Uvodimo $g(x) = f(x) - x^2$, dobivamo Cauchy u g $(g(x) + g(y) = g(x + y))$. Budući da je f omeđen odozdo, i g je omeđen. Cauchy + omeđenost ukazuje na to da je g linearan iz čega se dobiva rješenje.

2. Iz $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$. Za $x = 0$ dobivamo

$$f(y^2) = f(-y^2)$$

Što znaći da nam je dovoljno riješiti zadatak u domeni $\mathbb{R}^+$.

Neka a i b budu pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$x^2 - y^2 = a, \quad 2xy = b$$

Iz ovoga slijedi

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Dakle, naša funkcija sada izgleda kao

$$f(a) + f(b) = f(\sqrt{a^2 + b^2})$$

Napokon, neka $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bude definirana s $g(a) = g(\sqrt{a})$, onda imamo

$$g(a^2) + g(b^2) = g(a^2 + b^2)$$

za sve $a, b \in \mathbb{R}$. Za $x, y \geq 0$ uzimamo $a = \sqrt{x}$ i $b = \sqrt{y}$ i dobivamo $g(x + y) = g(x) + g(y)$. g je omeđen odozdo, prema tome, slijedi $g = kx$ i $f(x) = kx^2$ za sve $x \geq 0$

3. ELMO 2020 P1

4. Nakon supstitucije $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3}$ zadatak umire jer je g neprekidan i zadovoljava Cauchy (imamo g linearan).

5. Britanska Matematička Olimpijada runda 2 zadatak 2

6. Turski TST 2018 P2

7. Neka $g(\alpha) = f(\tan \alpha), \alpha \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Onda

$$g(\alpha + \beta) = f(\tan(\alpha + \beta) = f\left(\frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}\right) = f(\tan(\alpha)) + f(\tan(\beta)) = g(\alpha) + g(\beta)$$

Dakle, g zadovoljava Cauchy. Budući da je neprekidan imamo da je g linearna funkcija. To rješava zadatak.

8. Neko čudno Proof natjecanje

9. Pokazat ćemo da je f omeđen na intervalu $(0, \frac{1}{2})$.

Uzmimo $y = x + \frac{1}{x}$, onda imamo

$$(f(y))^2 = \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \geq 4$$

po AM-GM nejednakosti.

Gornja nejednakost nam je dala $|f(x)| \geq 2$ za $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ (jer je to skup vrijednosti koje pokriva $x + \frac{1}{x}$). Ovo nam ne daje omeđenost za x, mi ne možemo reći, x je veći ili jednak / manji ili jednak od neke određene vrijednosti (ne možemo ni definirati je li bio trebao biti omeđen odozdo ili odozgo). Zato radimo sljedeći fix

Uzmim $y \in (0, \frac{1}{2})$, onda $\frac{1}{y} \geq 2$, tj.

$$|f(y)| = \left(\left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right|\right)^{-1} \leq \frac{1}{2}$$

Odnosno, $|\ f(y)\ | \leq \frac{1}{2}$ za $y \in (0, \frac{1}{2})$ nam daje omeđenost funkcije i s gornje i s donje strane, odnosno, doista možemo reći da je f omeđen na intervalu $(0, \frac{1}{2})$. Uz aditivnost, to je dovoljno da zaključimo da je f linearan. To u kombinaciji s $f(1) = 1$ dobivamo $f(x) = x$.

10. USMCA 2019 4

11. Zadatak je poprilično gotov jednom kada n zapišemo u binarnoj reprezentaciji. Neka $f(1) = r$ i $n = \overline{1a_{k-1} \dots a_1 a_0}$. Onda je lagano za dokazat s indukcijom po k da $f(n) = r3^k + a_{k-1}3^{k-1} + \dots + 3a_1 + a_0$.

12. Dodajemo novu varijablu z tako da vrijedi

$$xf(x) - zf(z) = (x - z)f(x + z)$$

da možemo postići

$$xf(x) - zf(z) = xf(x) - yf(y) + yf(y) - zf(z) = (x - y)f(x + y) + (y - z)f(x + z)$$

odnosno dobivamo

$$(x - z)f(x + z) = (x - y)f(x + y) + (y - z)f(x + z)$$

te nakon supstituiranja $x + z = u, x + y = 1$ i $y + z = 0$ te rješavanjem sustava triju jednadžbi dobivamo

$$x = \frac{u + 1}{2}, y = \frac{1 - u}{2}, z = \frac{u - 1}{2}$$

S time naša funkcija postaje $f(u) = uf(1) + (1 - u)f(0)$, tj. $f(x) = ax + b$.

13. Dokazat ćemo da je jedino rješenje $f(n) = n^3 - 1$.

Neka $g(n) = f(n) + 1$, dakle $g(mn) = g(m)g(n)$, također imamo $g(2) = 8$. Pokazat ćemo da $g(p) = p^3$ za svaki prost broj $p > 2$.

Budući da je g strogo rastuća funkcija imamo

$$2^a > p^b \iff 8^a > g(p)^p$$

za bilo koje prirodne a i b. Nejednakost možemo zapisati kao

$$\frac{a}{b} > \frac{\log p}{\log 2} \iff \frac{a}{b} \iff \frac{\log g(p)}{\log 8}$$

Znamo da $\frac{a}{b}$ prolazi kroz bilo koje pozitivne racionalne brojeve. Promotrimo našu situaciju generalnije

Mi imamo neke realne α i β takve da, za $q \in \mathbb{Q}$ imamo $q > \alpha$ ako i samo ako $q > \beta$. Međutim, racionalni brojevi su *gusti*, znači da se možemo beskonačno približavati i α i β. Dakle, možemo zaključiti $\alpha = \beta$.

Vrativši se na našu stiauciju dobivamo

$$\frac{\log p}{\log 2} = \frac{\log g(p)}{\log 8}$$

odnosno $g(p) = p^3$. Zbog multiplikavnosti od g smo gotovi.

14. Prvo ćemo dokazati da $f(ab) = f(a) + f(b)$ ako $a^2 b \geq 4$. Naime

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}} \quad i \quad y = \frac{a + \sqrt{a^2 - \frac{4}{b}}}{\frac{2}{b}}$$

su pozitivni i zadovoljavaju $x + y = ab$ i $xy = b$. Onda

$$f(ab) = f(x+y) = f\left(\frac{x+y}{xy}\right) + f(xy) = f(a) + f(b)$$

Neka sada $x, y > 0$ i biramo neki z takav da

$$z = \max\left\{\frac{4}{x^2y^2}, \frac{4}{x^2y}, \frac{4}{y^2}\right\} > 0$$

Onda $(xy)^2 z \geq 4, x^2(yz) \geq 4, y^2 z \geq 4$ što znači da

$$f(xyz) = f(xy) + f(z), f(xyz) = f(x) + f(yz) \quad i \quad f(yz) = f(y) + f(z)$$

Odnosno $f(xy) = f(xyz) - f(z) = f(x) + f(yz) - f(x) = f(x) + f(y)$

15. Prisjeti se identiteta

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

obgrlivši to u funkciju dobivamo (koristimo aditivnost f)

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right) - f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

iz čega dobivamo

$$\frac{f(x-1)}{(x-1)^2} - \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x(x-1))}{x^2(x-1)^2}$$

što daje

$$x^2 f(x-1) - (x-1)^2 f(x) = f(x^2 - x)$$

što daje

$$x^2(f(x) - f(1)) - (x-1)^2 f(x) = f(x^2) - f(x)$$

što napokon daje

$$f(x^2) = 2xf(x) - x^2 f(1)$$

Nakon supstituiranja $x \to x + \frac{1}{x}$ dobivamo

$$f(x^2 + x^{-2} + 2) = 2(x + x^{-1})f(x + x^{-1}) - (x^2 + x^{-2} + 2)f(1)$$

što daje

$$f(x^2 =) + x^{-4} f(x^2) + f(2) = 2xf(x) + 4x^{-1} f(x) + 2x^{-3} f(x)$$

Sada, korištenjem identiteta $f(x^2) = 2xf(x) - x^2 f(1)$ NAPOKON dobivamo

$$f(x) = \left(\frac{f(2) + 2f(1)}{4}\right) x$$

za $x \neq 0, 1$. Ali $f(2) = 2f(1)$ pa imamo $f(x) = f(1)x$ što vrijedi i za $x = 0, 1$

16. ISL 2010 A6

17. Nakon $x = y = 0$ dobivamo $f(0) = 0$ te nakon $y = 1$ dobivamo

$$f(x+1) = (f(1)-1)f(x) + 1$$

Mi jako zelimo saznati vrijedost of $f(1)$. Označimo $f(1) = a$. Za $a = 1$ dobivamo jedno rješenje, pretpostavimo $a \neq 1$. Sada lako izračunamo

- $f(2) = a(a-1) + 1 = a^2 - a + 1$,
- $f(3) = (a-1)(a^2 - a + 1) = a^3 - 2a^2 + 2a$
- $f(4) = (a-1)(a^3 - 2a^2 + 2a) + 1 = a^4 - 3a^3 + 4a^2 - 2a + 1$

Iz $x = y = 2$ imamo $2f(4) = f(2)^2 + 1$ što nam nakon petljanja algebrom daje

$$a(a-2)(a-1)^2 = 0$$

Dakle, imamo $a = 0$ ili $a = 2$. Slučaj $a = 0$ nije toliko teško riješiti zato se odmah prebacujemo na slučaj $a = 2$.

Dobivamo $f(x+1$=f(x)+1, tj. dobivamo $f(x) = x + 1$ za $x \in \mathbb{Z}$. Sada, kako je $x+1$ rješenje, možemo pretpostaviti $f(x) = g(x) + 1$ i pokušat ćemo dokazati da $g(x) = x$. Uvjet postaje

$$g(x+1) = g(xy) = g(x)g(y) + g(x) + g(y)$$

onda $g(x) = x$ za $x \in \mathbb{N}$ i $g(x+1) = g(x) + 1$. Ako stavimo $y = k \in \mathbb{N}$ onda

$$g(x+k) + g(kx) = kg(x) + g(x) + k$$

dakle,

$$g(kx) = kg(x)$$

Onda nam $y = x$ daje $g(x^2) + g(2x) = g(x)^2 + 2g(x)$ i budući da $g(2x) = 2g(x)$ dobivamo $g(x^2) = g(x)^2$. Dakle, $g \geq 0$ na intervalu $(0, +\infty)$. Zamijenimo sada y s $y+1$ da dobijemo

$$g(x+y+1) + g(xy+x) = g(x)g(y+1) + g(x) + g(y+1)$$

Kako je

$$g(x+y+1) = g(x+y) + 1, g(y+1) = g(y) + 1$$

i

$$g(x+y) + g(xy) = g(x)g(y) + g(y)$$

oduzimanjem tih dviju relacija dobivamo $g(xy+x) = g(xy) + g(x)$. Sada ako $u, v \neq 0$ stavimo $y = \frac{u}{v}, x = u$ dobivamo $g(u+v) = g(u) + g(v)$ za $u, v \neq 0$. Kako $g(0) = 0$ zaključujemo da je g aditivan. Budući da $g \geq 0$, dobivamo $g(x) = cx$. Dakle, u konačnici imamo samo dva rješenja; $f(x) = x + 1$ i $f(x) = 1$.

18. Stvarno, zadatak je ekstreman.

23.3. N8: Patrik Cvetek - Bi$\mathbb{N}$go

Predavanje Hintovi Rješenja

Rješenja

Niz je definiran : $a_1 = 1$, a_n je najmanji broj veći od a_{n-1} i relativno prost s barem pola elemenata skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$. Dali postoji neparan broj koji nije u nizu?	Nađi sve neomeđene funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tako da $f(n + f(m) - 1)$ dijeli $f(n) + m - 1$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$	Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $p, q > n$ neparni prosti. Dokaži da brojeve $1, 2, \dots, n$ moš obojat u dvije boje tako da za sve $x \neq y$ iste boje, $xy - 1$ nije djeljiv s p i q.	M je prikazan kao umnožak prostih. Svakom prostom dodaj 1 i nazovi taj umnožak s N. M dijeli N. Dokaži ako N prikažemo kao umnožak prostih i svakom dodamo 1 da će taj broj bit djeljiv s N.	Neka je $p(n)$ broj različitih prostih djelitelja od n. Dokaži da je skup prirodnih rješenja $n \leq (p(n))^k$ konačan za sve $k \in \mathbb{N}$
Dokaži da postoje $a, b > 1$ sa $\gcd(a,b) = 1$ i $rad(ab(a+b)) < \frac{a+b}{2025}$.	Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $P(x) = x^n + n$. Jeli za neki neparan/paran n moguće da je $P(x)$ složen za sve $x \in \mathbb{N}$	Neka je $f(x)$ ne konstantan polinom. $m \in \mathbb{N}$ je $fora$ ako postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je : $f[divs(m)] = divs(n)$. Dokaži da ima konačno $fora$ brojeva.	Dokaži da postoji K tako da za sve proste $p > K$ broj prirodnih brojeva $a \leq p$ za koje $p^2 \mid a^{p-1} - 1$ je manji od $\frac{p}{2^{2025}}$	$n \in \mathbb{N}$, $S_n = \{a \mid \gcd(a,n) = 1, a \leq n\}$. $f(n)$ je najmanji broj tako da možemo podijelit S_n u $f(n)$ disjunktnih podskupova svaki tvori aritmetički niz. Postoji beskonačno (a,b) , $a, b > 2025$, $a \mid b$, $f(a) \nmid f(b)$
Dokaži da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{s_2(3i)} > 0.$	Neka je $n \in \mathbb{N}$, i p prost broj. Dokaži da: $p^p \mid n! \implies p^{p+1} \mid n!$	Neke je $k \in \mathbb{N}$. Niz $a_1, a_2, \cdots$ je kul ako vrijedi: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \lvert\{a_1, \dots, a_{n+k}\}\rvert$. Odredi broj kul nizova.	Nek je n umnožak 2025 različitih prostih brojeva. Nađi broj prirodnih rješenja: $n + \gcd(n,k) = k.$	Neka je p_i i-ti prost broj i $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k$. Dokaži da u nizu $1, \dots, N$ postoji točno $\frac{N}{2}$ brojeva koji su djeljivi s neparno mnogo prostih $p_i, i \leq k$.
Za $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ definiramo $sig(n) = \sum \alpha_i$. Dokaži da postoje 2025 uzastopnih brojeva od kojih za točno 45 vrijedi $sig(n) < 10$.	Odredi sve $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ za koje postoji n brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N}^n_{\geq 2}$ tako da za sve $i \neq j$ vrijedi: $a_i \mid a_j^2 + 1.$	Odredi sve permutacije $a_1, a_2, \dots, a_{2025}$ brojeva $1, 2, \dots, 2025$ tako da $j - i \mid a_j - a_i$.	Nek su a, b, c cijeli brojevi i da vrijedi: $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3.$ Dokaži da je abc kub.	Odredi sve parove prostih (p,q) za koje: $2^p = 2^{q-2} + q!.$
Odredi sve $n \in \mathbb{N}$, tako da: $\sigma(n) = \tau(n)\lceil\sqrt{n}\rceil.$	Za $n \in \mathbb{N}$, nek je $\alpha(n)$ aritmetička sredina djelitelja od n, i $\beta(n)$ aritmetička sredina svih $k \leq n, gcd(k,n) = 1$. Odredi sve rješenja od $\alpha(n) = \beta(n)$.	Neka je $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dokaži da je $a - b$ djeljiv s k ako i samo ako $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $\lfloor an \rfloor \equiv \lfloor bn \rfloor \pmod{k}.$	Za $n, k \in \mathbb{N}$, kažemo n je kul ako postoje $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{N}_0^k$ tako da: $n = a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + \cdots + a_k^{2^k}.$ Dali postoji k tako da su svi brojevi kul.	Dokaži $\forall n, x^n \equiv y^n \pmod{n}$ implicira $x = y$. Za koje parove (a,b) postoje beskonačno n tako da $a^n \equiv b^n \pmod{n}$.

IV. Ostalo

V. Projekti na Ljetnom kampu

24. Projekti

24.1. O projektima

Projekt je aktivnost u kojoj jedan ili više mentora u grupama od 3 do 9 učenika (ovisno o zainteresiranosti učenika za pojedini projekt) obrađuje kroz nekoliko popodneva detaljnije odabranu temu. Na ovogodišnjem je Kampu bilo ponuđeno sveukupno 10 projekata. Osim toga, za MEMO grupu su se paralelno održavala i natjecateljska predavanja.

Većina projekata može se svrstati u neku od sljedeće tri kategorije: natjecateljski, projekt iz primijenjene matematike, te takozvani "faksovski", gdje se učenici upoznaju s temama sa studija matematike. Projekti se održavaju kako bi se učenici upoznali sa širokim rasponom matematičkih tema, a što su naučili na projektima možete pročitati u nastavku!

P1: Matej Vojvodić i Marija Dora Marodi - Najslađi projekt (primjenjena matematika)

Na ovom projektu, koji je daleko najslađi, se uz abnormalnu količinu keksa Domaćica zagrebla površina ljepote statistike i vjerojatnosti.

Cilj ovog projekta bio je potvrditi ili opovrgnuti hipotezu da u kutiji stvarno ima 300 g keksa, kako je deklarirano na ambalaži.

Prvog i drugog dana projekta uveo se pojam vjerojatnosti, obradile osnove klasične i uvjetovane vjerojatnosti te Bayesov teorem kao uvod u statističko razmišljanje.

Trećeg dana su se teorijski obradili zakon velikih brojeva i centralni granični teorem, te su se definirali pojmovi: standardna devijacija, varijanca, srednje odstupanje, normalna raspodjela i korelacija.

Četvrti dan se provela statistička analiza s podacima o masi keksa u kutiji.

Tokom projekta izmjerena je masa 30 kutija Domaćica (od čega je oduzeta masa ambalaže). Zatim su se podaci obradili primjenom teorije s prethodnih dana.

Rezultati pokusa su bili grafički prikazani. Statistička analiza pokazala je da je vjerojatnost da smo slučajno dobili prosječnu masu od 309 grama izuzetno mala (a k tome je i svaka kutija imala više od 300g keksiju). To znači da razlika u odnosu na deklariranih 300 grama nije slučajna, nego stvarna na svim standardnim razinama značajnosti. Drugim riječima, **u prosjeku Domaćica paketi sadrže više keksa nego što piše na pakiranju** – što je neočekivan, ali slatko dobrodošao rezultat. Preporuka proizvođaču: nastaviti s “pretjerivanjem” – ovakav višak nitko neće zamjeriti.

P2: Dario Vuksan i Artur Garifullin - 3D grafika (primjenjena matematika - informatika/računarstvo)

Sudjelovali smo na projektu pod nazivom **3D grafika**. Prvi dan upoznali smo se s vektorima i kompleksnim brojevima. Naučili smo kako translatirati, rotirati i reflektirati vektore u dvodimenzionalnom sustavu. Sljedeći dan bavili smo se matricama – zbrajanjem i množenjem – koje smo potom primjenjivali u operacijama s vektorima. Uvidjeli smo da su matrice praktičniji alat od kompleksnih brojeva.

Nakon usvojenih osnova u 2D-u, znanje smo proširili na trodimenzionalni prostor. Najveći izazov bila je vizualizacija u 3D-u, no mentori su nam to jasno i detaljno objasnili. U radu smo koristili **GeoGebru** i **Desmos** koji su nam znano olakšali razumijevanje gradiva. Nakon teorijskog dijela, rješavali smo zahtjevne i zanimljive zadatke.

Posebno smo obradili pojmove **yaw** ($0° - 360°$), **pitch** ($-90° - 90°$) i **roll** ($-90° - 90°$), koje sada pouzdano razumijemo i primjenjujemo.

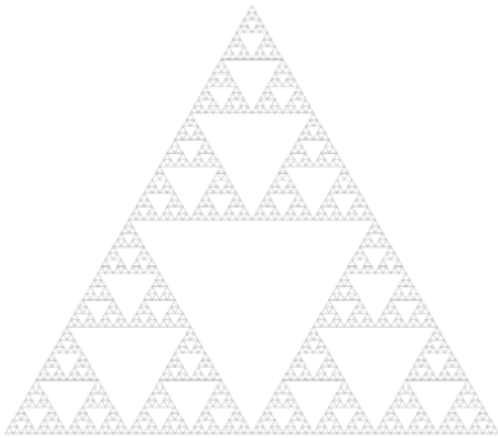
Atmosfera na projektu bila je opuštena, ali istovremeno radna i produktivna. Unatoč umoru i zahtjevnom tempu, mnogo smo naučili i napredovali. Projekt **3D grafika** bio je naš prvi odabir i u potpunosti je ispunio naša očekivanja zahvaljujući stručnom i predanom radu mentora.

P3: Martin Vrbovčan, Antonija i Mislav Brnetić - Fraktali (Razno)

Što su fraktali? Mnogi ljudi misle da su fraktali geometrijski oblici koji su samoslični (zumirajući dalje vidimo manje verzije početnog fraktala), ali to nije nužno točno. Uzmimo kao primjer obalu Velike Britanije: iako možda nije intuitivno, ona je također fraktal. Kako biste lakše shvatili ideju fraktala možete ih zamisliti kao oblike koji imaju beskonačno mnogo detalja. Doduše formalno su definirani kao oblici čija dimenzija nije cjelobrojna te je manja od dimenzije euklidskog prostora u kojem se taj oblik nalazi. Možda vas zanima kako to oblik može imati ne cjelobrojnu dimenziju. Razmislite o dimenziji ne kao o stupnju slobode, već kao faktoru mijenjanja veličine. Ako smanjite stranicu kvadrata dvaput, smanji mu se površina 2^2 puta, jer je dvodimenzionalan. Ako smanjite stranicu kocke dvaput, smanji mu se volumen 2^3 puta, jer je trodimenzionalan. Kao generalizaciju ove ideje, uvodi se pojam mase. Masu je najlakše definirati za samoslične oblike kao broj kopija jediničnog objekta koji sastavlja oblik. U tom slučaju, fraktalna dimenzija je definirana kao logaritam pri bazi dva od mase oblika sa duljinom stranice dvaput većom od duljine stranice jediničnog oblika. Jedan od najlakših fraktala za izračunati dimenziju je Sierpinskiev trokut (24.1).

Kako biste ga definirali, počnite s jednakostraničnim trokutom. Zatim, spojite polovišta stranica tog trokuta i "izrežite" središnji trokut. Taj postupak ponovite na svakom od 3 manja trokuta koji nastanu i tako dalje u beskraj. Sierpinskiev trokut je sastavljen od 3 manje kopije s dvaput kraćom duljinom stranice. Ubacite u formulu za računanje fraktalne dimenzije i dobijete $\log_2 3$, što je otprilike 1.585.

Slika 24.1: Sierpinskiev trokut



Može se izražunati dimanzija fraktala koji nisu samoslični koristeći razne metode aproksimacije. Na taj način se može dobiti da je dimenzija Velike Britanije otprilike 1.25. Osim fraktala, na projektu smo definirali nizove, limese nizova, limese funkcija i redove, te proučavali njihova svojstva. Otkrili samo i kako funkcije u kompleksnoj ravnini mogu stvoriti fraktale, poput Mandelbrotovog seta.

P4: Emanuel Bajamić, Jurica Špoljar, Karlo Jokoš i Patrik Cvetek - Ne budite glupi (natjecateljski)

Jako smo se zabavili na projektu. Mnogo smo toga naučili što će biti jako korisno za buduću natjecateljsku karijeru. Rješavali su MEMO simulaciju i to bolje od MEMOvaca . Prvo predavanje smo imali u blagovaonici i radili su funkcijske koje nisu često viđene. Dojmovi učenika su bili pozitivni i zadaci su bili veoma zahtjevni, ali su ih učenici uspjeli savladati. Neki primjer zadatka je:

Neka $f : R \to R$ bude aditivna funkcija za koju vrijedi

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$$

za sve $x \neq 0$. Dokaži da $f(x) = cx$ za $c \in \mathbb{R}$.

Drugi dan su rješavali Bingo. Tablica je bila 4×4 i cilj predavanje je bio za svakog učeniko da dobije Bingo, točnije trebali su riješiti 4 zadatka u stupcu, retku ili glavnim dijagonala. Učenici je ovaj format predavanja bio izrazito zabavan i jako interesantan te bi opet htjeli probati. Svi zadaci su bili iz područja teorije brojeva i bio je mix raznih ideja. Primjer jednog zadatka:

Dokaži da postoji K tako da za sve proste $p > K$ broj prirodnih brojeva $a \leq p$ za koje

$$p^2 \mid a^{p-1} - 1$$

je manji od $\frac{p}{2^{2025}}$.

Treći dan su učili Posete i rješavali jako zahtjevne zadatke, uključujući P6 s ovogodišnjeg IMO-a. Naučili su Dilworthov, Miskiev, Erdoš-sekereš teorem koji su dokazivali i kasnije primjenjivali u raznim teškim zadacima.

Četvrti dan više manje radili su inverziju. Upoznali su se s osnovnim konfiguracijama koje uključuju inverziju. Bilo im je toliko zabavno da nisu htjeli prestati, jedino što je uspjela zaustaviti to predavanje bio je neizbježni mentorski sastanak gdje ih je nažalost mentor trebao napustiti.

P5: Marko Hrenić i Karla Pogelšek - Matematička analiza (fakultetski / primjenjena matematika)

U sklopu projekta **„Uvod u matematičku analizu"** s nabrijanim učenicima obradili smo niz tema koje čine osnovu ovog područja da dobiju nekakvu podlogu za gradivo koje ih čeka u 4.razredu srednje i dalje na faksu.
Svojstva funkcija su učenici već znali pa smo odmah krenuli od **limesa** - najprije smo razgovarali o ideji približavanja i graničnih vrijednosti, a zatim postepeno uveli formalnu definiciju:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{ako za svaki } \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ tako da iz } 0 < |x-a| < \delta \text{ slijedi } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Na primjerima smo prolazili različite načine računanja, od jednostavnijih slučajeva do onih koji traže algebarske transformacije, poput racionalizacije ili korištenja poznatih limesnih oblika, npr.:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sljedeći korak bile su **derivacije**. Pravila smo uvodili polako, uz objašnjenja i dokaze. Učenici su savladali osnovna pravila poput:

$$(f+g)' = f' + g', \quad (f\cdot g)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Posebno smo naglasili derivaciju složene funkcije:

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x),$$

te osnovne derivacije elementarnih funkcija, primjerice:

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

Uz teoriju, radili smo zadatke iz analize promjena i optimizacije, gdje se derivacije koriste za pronalaženje maksimuma i minimuma funkcija.
Nakon derivacija, prešli smo na **integrale**. Upoznali smo neodređeni integral kao inverzni postupak deriviranja:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C,$$

te određeni integral kao alat za računanje površina: F(b)-F(a)
i onda drugi teorem za a->x

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Obradili smo metodu supstitucije:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du,$$

i parcijalnu integraciju:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Radili smo i integrale racionalnih funkcija, gdje se često koristi razlaga na parcijalne razlomke, te integrale iracionalnih funkcija, koji ponekad zahtijevaju trigonometrijske supstitucije poput $x = a \sin t$ ili $x = a \tan t$.
Tu smo i stali – nakon integrala racionalnih i iracionalnih funkcija – ostavljajući ostatak gradiva za budući rad i dublje istraživanje.

P6: Karlo Jokoš i Zvonko Andrijević - Faktorizacija na max (natjecateljski)

Faktorizacija na max je bio projekt natjecateljskog tipa gdje su učenici koristili faktorizaciju i još mnoge druge tehnike algebarske manipulacije kako bi riješili razne zadatke iz algebre i teorije brojeva. Prvo smo krenuli s raznim načinima kako naći faktorizaciju kada je pred nas stavljen zahtjevan i dugačak algebarski izraz. Naučili smo nešto o simetričnim polinomima i s novim znanjem puno lakše nalazili faktorizaciju, a tako i puno lakše rješavali teže zadatke. Drugi dan smo naučili neke druge metode algebarske manipulacije i rješavanja jednadžbi kao npr. princip ekstrema. Uz pomoć tih novih metoda uspješno smo svladali novi set zadataka koje su nam zadali naši mentori. Da pokažemo da se metode faktorizacije i algebarske manipulacije mogu primijeniti na više od jednog područja, zadnja dva dana smo proveli rješavajući razne zadatke iz teorije brojeva. Osim što smo vidjeli mnoge koristi faktorizacije u teoriji brojeva, podsjetili smo se drugih standardnih metoda za rješavanje kao kongruencije i Euklidov algoritam. Rješavali smo zadatke od razine županijskog do čak nekih koji su se pojavili na međunarodnoj matematičkoj olimpijadi. Mnogo smo naučili na ovom projektu i jedva čekamo da primijenimo svoja novodobivena znanja na nadolazećim natjecanjima.

P7: Mislav Plavac - Sudoku (fakultetski / razno)

Prvu polovicu projekta proveli smo upoznajući se s običnim sudokuom. Prvi dan upoznali smo se s pravilima sudokua te početničkim trikovima i metodama rješavanja, što je uključivalo parove i X-wingove. Drugi dan radili smo na naprednijim metodama poput swordfisha, Y-wingova i skyscrapera. Nakon toga upoznali smo se s teorijskim pristupom sudokuu – Set Equivalence Theory – te pokazali neke opće poznate ekvivalencije: Phistomefelov prsten i Aadov teorem.
Drugu polovicu projekta bavili smo se varijantama sudokua. Vidjeli smo neke česte varijante poput oil and water, kropki-točaka, dutch whispers, german whispers i fog of war. Upoznali smo i sudokue poznatih settera, poput Jamesa Sinclaira, Aada van de Weteringa i Martyja Searsa.

P8: Ivan Premuš i Miošić - Koji je jači: Mislav ili Sibirski Plavac? (primjena)

Yu-Gi-Oh! je kartaška igra koju smo kroz ovaj tjedan učili igrati. Prvi smo se dan upoznali s igrom i serijom, vrstama karata koje postoje (monster, spell i trap) te osnovnim pravilima. Odigrali smo svoje prve dvoboje s unaprijed napravljenim starter deckovima. Drugi smo dan učili o malo kompliciranijim mehanikama igre i upoznali smo se s online okruženjem duelingbook.com na kojem smo opet igrali međusobno. Trećeg smo dana kategorizirali karte s obzirom na ulogu u decku. Naučili smo kako procijeniti koje su karte korisnije u decku od drugih te smo odredili koliko bi kojih karata idealan deck trebao imati. Proučili smo i liste zabranjenih i ograničenih karata da saznamo koji su efekti tipično ograničeni zbog svoje snage. Četvrti smo dan sami sastavljali svoje deckove i isprobavali ih jedni protiv drugih. Naravno, nismo previše igrali zato da bi neke tajne ostale skrivene do turnira koji se održao posljednji dan i u kojem smo odmjerili snage deckova koje smo sastavili.

25. Natjecanja

25.1. O natjecanjima

Kao i svake godine, tijekom Ljetnog kampa sudionici su se imali prilike i natjecati iz matematike. Kao i inače, jedno poslijepodne održala su se natjecanja Reli i ELMO u organizaciji mentora MNM-a.

Reli je već tradicionalno ekipno natjecanje u kojem timovi od četiri učenika raznih uzrasta i predznanja imaju priliku rješavati po 8 zadataka iz svakog od četiri glavna područja olimpijske matematike. Ove godine najbolje rezultate ostvarile su ekipe:

1. **Tim Simeon** – s osvojenih 235 boda!
2. **Ne** – s osvojenih 184 bodova!
3. **Fermat Primes** – s osvojenih 176 bodova!

Svim sudionicima velike čestitke, a posebno Timu Simeon koji je u potpunosti izdominirao i one najteže zadatke. U timu su bili: Anja Tešević, Mate Radoš, Noa Hornischer i Stela Nothig

ELMO (Ekstremno loša matematička olimpijada) je pojedinačno natjecanje na kojem natjecatelji rješavaju test od pet olimpijskih zadataka sličnih zadacima na državnim natjecanjima. Ove godine bila je jubilarna deseta iteracija ELMO-a te su upravo zbog toga zadatci bili uvjerljivo ekstremno loši. Ove godine **prvo mjesto osvojio je Fran Pilipović.**

Također, na poticaj učenika Kristijana Šimovića održan je i ~~prvi~~ ~~drugi~~ ~~treći~~ **četvrti KFMO** (Kristijanova funkcijska matematička olimpijada)! Zadatke su osmislili Val Karan, Mislav Plavac te naravno Kristijan Šimović, a natjecanju su mogli pristupiti svi koji su htjeli. **Najbolji rezultat ostvario je, ponovno, Fran Pilipović!**

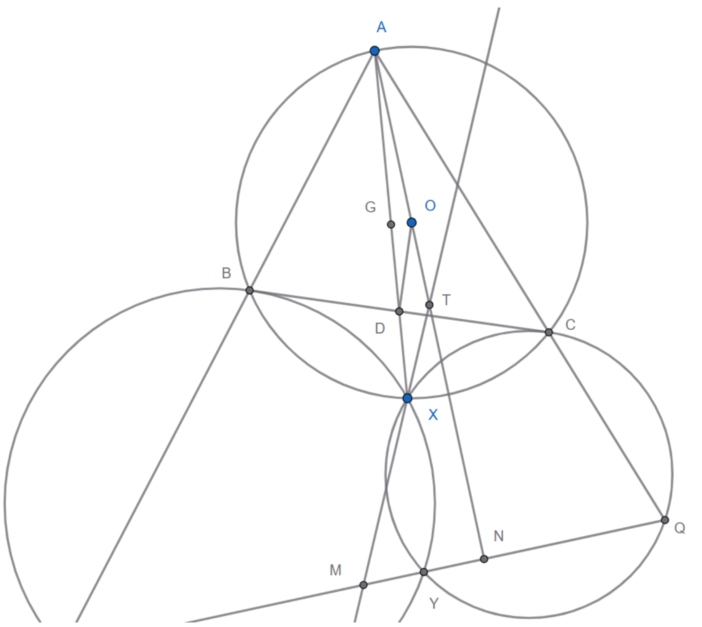
U nastavku donosimo zadatke i rješenja ovogodišnjih ELMO-a i KFMO-a.

10. Ekstremno loša matematička olimpijada
Kaštel Štafilić, 10. kolovoza 2025.

1. Neka su O i G redom središte opisane i težište trokuta ABC. Neka su w_b i w_c redom kružnice koje diraju BC u B i C i nalaze se sa suprotne strane BC od A, takve da prolaze kroz $((ABC) \cap AG) \setminus \{A\}$. Neka su P i Q redom presjeci AB i AC, različiti od B i C s w_b i w_c. Neka je M polovište PQ i neka je T polovište visine iz A na PQ. Dokaži da su točke M, T i X kolinearne ako je $\angle AGO = 90°$.

Jurica Špoljar

Prvo rješenje



Započnimo dokazivanjem elementarnih svojstava u ovoj konfiguraciji: Neka je N polovište $\overline{BC}$. Neka je $X = ((ABC) \cap AG) \setminus \{A\}$ i neka je Y presjek w_b i w_c koji je različit od X. Tvrdimo sljedeće:

- Y leži na AG i posebno Y je preslika A preko N.
- Y je na PQ
- $BCQP$ tetivan

Dokaz:

Neka je Y' preslika A preko N. Tada je $ABY'C$ paralelogram i vrijedi $\angle BCX = \angle BAX = \angle XY'C$, iz čega po obratu poučka o tetivi i tangenti slijedi da je BC tangenta na (CXY'). Kako je kružnica koja je tangentna na pravac (ovdje BC) koja prolazi fiksnom točkom ne na tom pravcu (ovdje X) jedinstveno određena (jer je centar te kružnice jedinstven presjek simetrale $\overline{CX}$ i okomice iz C na BC) slijedi da $(CXY') = w_c$ i analogno slijedi da $(BXY') = w_b$, stoga je Y' presjek w_b i w_c različit od X te stoga $Y' \equiv Y$ iz čega slijedi da je Y preslika A preko N.

Lako se provjeri da $\angle PYX + \angle XYQ = (\pi - \angle PBX) + (\pi - \angle XCQ) = \angle ABX + \angle ACX = \pi$, stoga su točke P, Y, Q kolinearne.

Konačno, kako $180^o - \angle BCY = \angle ACB = \angle AXB = 180^o - \angle BXY = \angle BPY = \angle BPQ$ slijedi da je $BCQP$ tetivan.

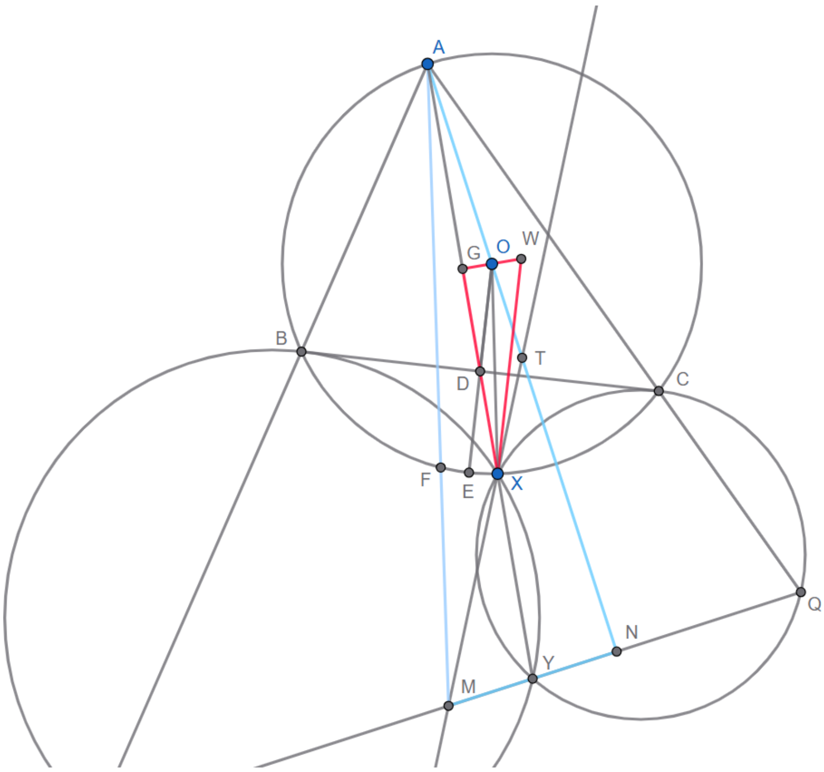
S dokazanim preliminarnim činjenicama o konfiguraciji posvetimo se rješavanju zadatka. Neka je N nožište visine iz A na PQ. Dovoljno je dokazati da je X težište $\triangle AMN$. Tada bi točke M, X, T ležale na M-težišnici tog trokuta i stoga bile kolinearne.

Uvjet zadatka implicira $AG = GX$, stoga kombinirajući teorem o težistu i činjenicu da je Y preslika A preko N slijedi $\frac{AY}{AX} = \frac{AN}{AG} = \frac{3}{2}$. Ovo rješenje se sad može završiti na više načina:

Prvi završetak: Najelegantnije trust (Patrik Cvetek)

Da bi dokazali da je X težište, dovoljno je dokazat da pravac AY raspolavlja dužinu MN. Jer več imamo $|AX| = 2|XY|$ to implicira da je X težište.

Definirajmo točku W kao sječište GO i pravca kroz X paralelnog s OD. Iz toga što imamo $GD = DX$ slijedi da je $GO = OW$. Dokazat ćemo sličnost trokuta AMN i GXW i dokazati da je pravac XO u trokutu XGW definicijski jednak pravcu AY trokuta AMN što implicira da je AY težišnica i završava zadatak.



Već imamo da su oba trokuta pravokutna (kako su definirana).

Također imamo $\angle OXA = \angle XAO = \angle XAN$ (jednakokračan trokut i točke A, O i N kolinearne jer je izogonala od AO visina) Tako da ostalo je dokazat da je $\angle XAM = \angle OXW$

Označimo s E polovište manjeg kružnog luka BC i s F sječište AM i kružnice (ABC) Iz toga što je $XW \parallel DO$ imamo $\angle EOX = \angle DOX = \angle OXW$. Sada uočimo da je AM izogonala od AD (jer su trokuti ABC i AQP slični). Iz ovoga izravno slijedi $\angle FAX = 2\angle EAX = \angle EOX$. Ovo dokazuje sličnost i pokazuje da su AY i XO jednako definirani u oba trokuta.

Drugi završetak: naslov rj (Jurica Špoljar)

Neka je P_M polovište $\overline{AM}$

Neka je Z drugi presjek AG s kružnicom (APQ). Kako je $BCQP$ tetivan i kako je AM težišnica u ABC slijedi da je AM A-simedijana u $\triangle APQ$. Dokazati ćemo da pravac NX raspolavlja AM, tj prolazi kroz P_M.

Kako $\angle CAX = \angle XYB = \angle XPB = \angle XPA$ i analogno $\angle BAX = \angle XQA$ slijedi da su AP i AQ redom tangentne na (AXQ) i (AXP) te je stoga X kao presjek tih kružnica A-Dumpty točka u $\triangle APQ$. Ta točka je poznato polovište $\overline{AZ}$.

Neka je H ortocentar $\triangle ABC$. Kako je poznato da su H, G i O kolinearne na Eulerovom pravcu slijedi da je G projekcija H na AM, to jest A-Humpty točka u $\triangle ABC$.

Potrebno je dokazati da su P_M, X i N kolinearne. Konstruirati ćemo bijektivnu transformaciju koja će tim točkama redom pridružiti D, G i A.

Primjenimo sljedeću kompoziciju transformacija, nazovimo ju ϕ:

- Homotetija s centrom u A, koeficijenta 2
- Preslikavanje preko pravca PQ
- Preslikavanje preko simetrale $\angle BAC$
- Homotetija koja šalje presliku dužine $\overline{PQ}$ preko simetrale $\angle BAC$ u dužinu $\overline{BC}$

Kompozicija zadnja dva koraka šalje trokut APQ u ABC te stoga i sve karakteristične točke. Svaka od ovih transformacija čuva kolinearnosti i omjere udaljenosti te je svaka od ovih transformacija bijektivna, stoga je i cijela kompozicija bijektivna. Nadalje, inverz ove kompozicije ϕ^{-1} je također bijektivan i

Promotrimo sad djelovanje ϕ nad točkama N, X i P_M.

N se prvo slika u presliku A preko PQ, zatim u A i ostaje fiksna u zadnje dvije transformacije.

X se prvo slika u Z, zatim u A-Humpty točku $\triangle APQ$ (poznato je svojstvo da je preslika Humpty točke preko stranice presjek opisane kružnice i odgovarajuće simedijane), zatim pod zadnje dvije transformacije u točku G, A-Humpty točku $\triangle ABC$.

P_M se prvo slika u M, ostaje fiksna pri drugoj transformaciji i slika se u D pri zadnje dvije transformacije.

ϕ

2. Usmjeren graf je usmjeren grad ako :

- Postoji jedinstveni "početni" vrh
- Svaki vrh ima točno jedan usmjereni brid A prema nekom vrhu
- Svaki vrh ima točno jedan usmjereni brid B prema nekom vrhu
- Neki vrhovi su "dobri"
- Mogu postojati bezimeni usmjereni bridovi

Usmjerena metropola je usmjeren grad bez bezimenih bridova.
Dobra šetnja je neki konačan niz $(a_n)_{n\leq k}$ sastavljen od A i B za koji vrijedi da ako počnemo na "početnom" vrhu i u svakom koraku $i = 1, 2, 3 \ldots k$ hodamo bezimenim usmjerenim bridovima koliko hoćemo, a i ne moramo onda idemo usmjerenim bridom a_i da ćemo na kraju doći do "dobrog" vrha.

Označimo s λ(grad) skup svih dobrih šetnji u usmjerenom gradu.

Neka su Solin i Kaštela usmjerene metropole.

(3 boda) Dokaži da postoji usmjeren grad Split za koji vrijedi :

$$\lambda(\text{Split}) = \lambda(\text{Kaštela})\lambda(\text{Solin})$$

(7 bodova) Dokaži da postoji usmjerena metropola Split za koju vrijedi :

$$\lambda(\text{Split}) = \lambda(\text{Kaštela})\lambda(\text{Solin})$$

(Napomena : Za skupove S_1 i S_2 sa S_1S_2 označavamo $\{(c_n) := (a_n) + (b_n) \mid (a_n) \in S_1, (b_n) \in S_2\}$ gdje je $(c_n) := (a_n)_{n \leq k} + (b_n)_{n \leq l}$ niz tako da je $c_n = a_n$ za $n \leq k$ i $c_{k+n} = b_n$ za $n \leq l$. Npr ako je $S_1 = \{(A, B)\}$ i $S_2 = \{(A), (B)\}$ imamo $S_1S_2 = \{(A, B, A), (A, B, B)\}$.)

Patrik Cvetek

Rješenje:

a) Dovoljno je konstruirati Split na sljedeći način. Uzmimo Kaštela i Solin i definiramo Split na sljedeći način
   - Početni vrh mu je početni vrh od Kaštela
   - Sve usmjerene bridove od Kaštela i Solina ostavljamo iste
   - Samo dobri vrhovi od Solina ostaju dobri
   - Postoje bezimeni usmjereni bridovi od dobrih vrhova od Kaštela do početnog vrha od Solina

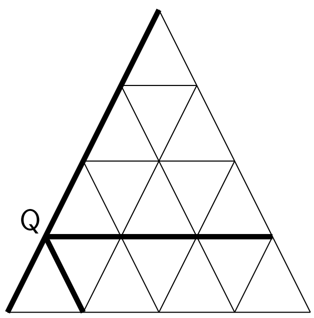
   Lako se uvjerimo da je ovo zaista ono što se traži. Jer sve dobre šetnje u Splitu dobiješ tako da napraviš dobru šetnju u Kaštelima, pa jedan hod s neusmjerenim bridom, i na kraju dobru šetnju u Solinu. Što je točno što smo htijeli dokazat.

b) Da bi konstruirali Split bez bezimenih bridova, uzet ćemo usmjereni graf iz a) (nazvat ćemo ga Split') i definirat novi na sljedeći način
   - Za svaki podskup vrhova iz Split' postrojat će takoimeni vrh u Splitu
   - Početni vrh u Splitu bit će vrh dobiven da je on samo skup početnog vrha od Kaštela i vrhova koji možeš doći iz početnog vrha pomoću bezimenih usmjerenih bridova.
   - Svaki usmjereni brid A/B iz vrha koji predstavlja neki podskup Q ići će u vrh koji predstavlja podskup R tako da se R sastoji od svih vrhova na koje je moguće doći putujući iz vrha iz Q, onda na neke bezimene bridove, i na kraju usmjereni brid A/B.
   - Dobri vrhovi u Splitu bit će oni vrhovi koje predstavljaju podskupovi koji imaju dobre vrhove iz Splita'.

   Ovime smo konstruirali Split koji je totalno ekvivalentan Splitu' samo bez bezimenih usmjerenih bridova.

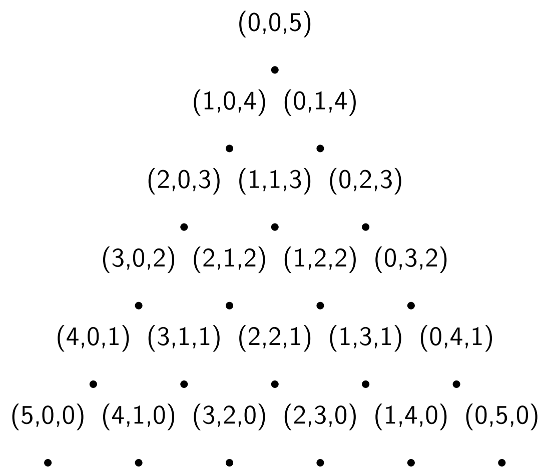
   (Ukoliko nejasno, možete pogledati ovu ideju ovdje)

3. Nad svakom stranicom jednakostraničnog trokuta konstruiramo pravce paralelne stranici trokuta tako da visinu pripadane stranice dijeli na $N \in \mathbb{N}$ jednakih dijelova (skica za $N = 4$ ispod). Na vrhove novonastalih manjih jednakostraničnih trokuta postavljaju se kraljice. Kraljica napada sve točke na čijim je pravcima (skica ispod, kraljica je Q). Koliko najviše kraljica, da se međusobno ne napadaju, možemo postaviti ovisno o N?



Karlo Jokoš

Rješenje:
Označimo svaki vrh kao što je prikazano na slici



Primijetimo odmah koje blagodati nam ovakva reprezentacija daje. Recimo da smo psotavili kraljicu na točke (a_i, b_i, c_i) i (a_j, b_j, c_j). Tada, ako imamo $a_i = a_j$, onda su kraljice postavljene na dijagonali koja ide prema dolje desno, dakle kraljice se napadaju, dakle, to ne možemo imati. Slično tako, ne možemo imati $b_i = b_j$ i $c_i = c_j$. Dakle, sada smo spremni reformulirati zadatak u njegov lakši oblik:

Neka $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{N}_0$ za $i \in \{1, 2, \ldots, M\}$ budu takvi da $a_i + b_i + c_i = N$ i $a_i \neq a_j, b_i \neq b_j, c_i \neq c_j$ za bilo koje i i j. Tražimo maksimalnu vrijednost broja M (koji corresponda ukupnom broju kraljica).

Sada slijedi čisti global pristup zadatku za bound.

Ukupan zbroj $a_i + b_i + c_i$ za sve i mora biti

$$\sum_{i=1}^{M}(a_i + b_i + c_i) = MN$$

Nadalje, budući da nam se vrijednosti od a, b, c ne ponavljaju, imamo bound

$$MN = \sum_{i=1}^{M}(a_i + b_i + c_i) \geq 3\sum_{i=1}^{M-1} = \frac{3(M-1)M}{2}$$

Odnosno

$$M \leq \left\lfloor \frac{2}{3}N \right\rfloor + 1$$

Konstrukcije, ovisno o mod 3, su sljedeće:

$N = 3k-1$, $\left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor + 1 = 2k$		
a_i	b_i	c_i
0	$k+1$	$2k-2$
1	$k+2$	$2k-4$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$2k$	0
k	0	$2k-1$
$k+1$	1	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k-1$	$k-1$	1

$N = 3k$, $\left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor + 1 = 2k+1$		
a_i	b_i	c_i
0	k	$2k$
1	$k+1$	$2k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	0
$k+1$	0	$2k-1$
$k+2$	1	$2k-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$k-1$	1

$N = 3k+1$, $\left\lfloor \frac{2N}{3} \right\rfloor + 1 = 2k+1$		
a_i	b_i	c_i
0	k	$2k+1$
1	$k+1$	$2k-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$2k$	1
$k+1$	0	$2k$
$k+2$	1	$2k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$k-1$	2

4. Dan je $n \in \mathbb{N}$. Nađi najmanji k u ovisnosti o n takav da za svaki $S \subset \mathbb{N}$, $|S| = n$ vrijedi barem jedna od sljedećih tvrdnji:

- postoji k-člani skup $K \subseteq S$ t.d. za sve $a, b \in K$ vrijedi $a \mid b$ ili $b \mid a$,
- postoji k-člani skup $K \subseteq S$ t.d. za sve $a, b \in K$ niti $a \mid b$ niti $b \mid a$.

Emanuel Bajamić

Rješenje:
Doslovno samo Mirsky;

Statement Mirskyja: u svakom konačnom posetu, maksimalna veličina lanca jednaka je minimalnom broju antilanaca čija unija pokriva poset.
Pri čemu

Par skupa S i binarne relacije $\leq$ na S je parcijalno uređen skup (ili poset) ako:

- $x \leq x$ za svaki $x \in S$, te ne vrijedi $x \leq y$ i $y \leq x$ za različite $x, y \in S$.
- $x \leq y$ i $y \leq z$ implicira $x \leq z$,
- nema ciklusa (osim petlji) u usmjerenom grafu s vrhovima S i bridovima $x- > y$ kad god $x \leq y$.

5. Ukrug je poredano konačno mnogo realnih brojeva. Svaki broj je obojan u crveno, bijelo ili plavo. Svaki crveni broj dvaput je manji od zbroja dvaju njemu susjednih brojeva, svaki bijeli broj jednak je zbroju dvaju njemu susjednih brojeva, a svaki plavi broj je dvaput veći od zbroja dvaju njemu susjednih brojeva. Neka je b zbroj svih bijelih brojeva, a p zbroj svih plavih brojeva, pri čemu su oba zbroja različita od 0. Odredi omjer $\frac{b}{p}$.

Patrik Cvetek

Rješenje:

Neka su redom $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zadani brojevi. Radi jednostavnijeg zapisa označimo

$x_{n+1} = x_1$ i $x_0 = x_n$.

Neka je c zbroj svih crvenih brojeva, b zbroj svih bijelih brojeva, p zbroj svih plavih brojeva te $S = c + b + p$ zbroj svih brojeva.

Ako je x_i crveni broj, onda je $x_{i-1} + x_{i+1} = 2x_i$.

Ako je x_i bijeli broj, onda je $x_{i-1} + x_{i+1} = x_i$.

Ako je x_i crveni broj, onda je $x_{i-1} + x_{i+1} = \frac{1}{2}\, x_i$.

Ovako smo uvjete iz zadatka napisali kao jednakosti koje povezuje tri uzastopna broja.

Promotrimo zbroj svih tih jednakosti.

Zbrojimo li sve ove jednakosti (za $i = 1, 2, \ldots, n$) s desne strane jednakosti ćemo dobiti

$$2c + b + \frac{1}{2}\, p.$$

dok ćemo s lijeve strane dobiti

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} x_{i+1} = 2S = 2c + 2b + 2p.$$

Dakle, $2c + 2b + 2p = 2c + b + \frac{1}{2}\, p$,

tj.

$$\boxed{\frac{b}{p} = -\frac{3}{2}.}$$

Mladi nadareni matematičari
"Marin Getaldić"

4. Kristijanova funkcijska matematička olimpijada
Ogulin, 10. kolovoza 2025.

1. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(xf(y)) + f(f(y)) = f(x)f(y) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Mislav Plavac

Rješenje. Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo $f(f(y)) = f(0)f(y) + y - f(0)$. Uvrštavanjem $x = 1$ dobivamo $f(f(y)) = \frac{1}{2}(f(1)f(y) + y)$ Izjednačavanjem dobivamo

$$\begin{aligned} 2f(0)f(y) + 2y - f(0) &= f(1)f(y) + y \\ y - f(0) &= f(y)(2f(0) - f(1)) \end{aligned}$$

Kada bi bilo $2f(0) = f(1)$ desna strana bi bila konstanta, a lijeva ne bi. Dakle možemo podijeliti s $2f(0) - f(1)$ i dobivamo da je f linearna funkcija. Uvrštavanjem $f(x) = ax + b$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} ab + 2b &= b^2 \\ ab + 1 &= a^2 \end{aligned}$$

Dobivamo da su rješenja $f(x) = x, f(x) = -x, f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.

2. Neka je G kolekcija funkcija iz A u A takvih da

- za svaki f u G vrijedi $f(f(x)) = x$ za sve x u A
- za sve f, g u G je $f \circ g$ u G

Dokažite da za sve f, g u G i sve x u A vrijedi $f(g(x)) = g(f(x))$

Kristijan Šimović

Rješenje. Neka je x iz A te f, g iz G proizvoljni. Promatrajmo izraz $f(g(f(g(x))))$. Kako su f, g u G znamo da je $f \circ g$ u G po drugom svojstvu, a po prvom je onda

$$f(g(f(g(x)))) = (f \circ g) \circ (f \circ g)(x) = x$$

Primjenom f na obje strane jednadžbe imamo

$$f(x) = f(f(g(f(g(x))))) \overset{\text{prvo svojstvo}}{=} g(f(g(x)))$$

Analogno primjenom g na boje strane dobivamo traženu jednakost.

3. Odredite sve funkcije $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ takve da vrijedi

$$f(a+2b) \mid a^2+4f(b)+4ab, \quad \forall a,b\in\mathbb{N}$$

te da je $\{a : f(a)=1\}$ konačan skup.

Napomena. 1 je prirodan broj. (those who know)

Val Karan

Rješenje. Pokazat ćemo da je slika od f beskonačan skup. Pretpostavimo suprotno da f postiže konačno mnogo vrijednosti $\{a_1,a_2,...,a_k\}$. Definirajmo $N=a_1a_2...a_k$ kao umnožak tih brojeva i prikažimo ga u kanonskom obliku. $N=p_1^{t_1}p_2^{t_2}...p_l^{t_l}$. Neka je A rješenje sustava kongruencija

$$x^2 \not\equiv -4f(N) \quad (mod \quad p_i)$$

Takav A će postojat zbog CRT-a. Uvrstimo u početnu djeljivost $a=A+kN$ i $b=N$ za prirodni k

$$f(A+(k+2)N)|(A+kN)^2+4f(N)+4(A+kN)N$$

Lijeva strana je djelitelj od N po definiciji pa

$$f(A+(k+2)N)|A^2+4f(N)$$

Po definiciji broja A izraz s desne strane ne može biti djeljiv ni s jednim prostim djelitelj od lijeve strane pa zaključujemo

$$f(A+(k+2)N)=1$$

Kako je k bio proizvoljan dobili smo beskonačno mnogo brojeva koji se šalju u 1 što kontradiktira pretpostavku zadatka.
Nadalje slika od f je beskonačna. Početna djeljivost je ekvivalentna sa

$$f(a+2b)|(a+2b)^2+4(f(b)-b^2)$$

Radi jednostavnosti uvedimo $g(x)=4(f(x)-x^2)$

$$f(k)|k^2+g(b) \quad \forall k,b \quad b<k/2$$

Za bilo koja dva prirodna broja a,b uzmimo $k>2\max(a,b)$ sa proizvoljno velik $f(k)$. Tada vrijedi

$$f(k)|g(a)-g(b)$$

Kako je $f(k)$ proizvoljno velik g mora biti konstantna funkcija pa $f(x)=x^2+C$. Laganom provjerom se vidi da je $C=0$ pa je jedino rješenje $f(x)=x^2$

4. Odredite sve funkcije $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ takve da vrijedi

$$f(f(f(x)))(x+f(xy))=1+\frac{f(y)}{x^2}, \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^+$$

Kristijan Šimović

Rješenje.
Lema 1. f postiže proizvoljno male vrijednosti.

Za fiksan y promatrajmo jednadžbu kako x postaje proizvoljno velik. Desna strana jednakosti ostat će ograničena odozgo, dok će faktor $x+f(xy)$ postati proizvoljno velik. Zato $f(f(f(x)))$ mora postići proizvoljno male vrijednosti čime i $f(x)$

Lema 2. $f(f(f(x)))=1/x$

$$f(f(f(x)))(x+f(xy)) = 1 + \frac{f(y)}{x^2} \geq 1$$

Sada kako je infimum od f jednak 0 uzimanjem y takvih da $f(xy)$ bude proizvoljno malen dobije se

$$f(f(f(x)))x \geq 1$$

Na sličan način

$$f(f(f(x)))x \leq 1 + \frac{f(y)}{x^2}$$

pa $f(f(f(x)))x \leq 1$ Time zajedno smo dokazali lemu.

Uvrštavanjem $y = 1$ u početnu jednadžbu i korištenjem $f(f(f(x))) = 1/x$ dobije se da je jedino rješenje

$$f(x) = 1/x$$

5. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$f(x+f(y)) + f(xy) = f(x)f(y) + 2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Kristijan Šimović

Rješenje.

Lema 1.: f nije periodična funkcija

Pretpostavimo suprotno. Neka je $t \neq 0$ period te je $f(t) = f(0)$. Uspoređivanjem $P(x,t)$ i $P(x,0)$ dobije se

$$f(xt) = f(0)$$

To implicira da je funkcija konstanta, a laganom provjerom se vidi da konstantnih rješenja nema.

Lema 2: $f(0) = 1, f(f(x)) = f(x+1) = f(x) + 1$

Iz $P(x,y)$ i $P(y,x)$ dobije se

$$f(x+f(y)) = f(y+f(x))$$

Iz toga također slijedi $f(f(x)) = f(x+f(0))$ Višestrukom primjenom ova dva svojstva dobije se:

$$f(f(f(x))+y) = f(f(x)+f(y)) = f(x+f(f(y))) = f(x+f(y+f(0))) = f(f(x)+y+f(0))$$

Kad usporedimo lijevu i desnu stranu vidimo da je f periodična s periodom $f(f(x)) - f(x) - f(0)$. Iz Leme 1 mora vrijediti $f(f(x)) = f(x) + f(0)$.

Uvrstimo to u jednadžbu $P(0,y)$ i dobijemo $f(0) = 1$ te ostala tražena svojstva.

Lema 3. $f - 1$ je Cauchyeva

Koristeći $f(x+1) = f(x) + 1$ možemo izračunati $P(x, y+1) - P(x,y)$ što je

$$f(xy+x) + 1 - f(xy) = f(x)$$

Uvedimo zamjene $y = y/x, g(x) = f(x) - 1$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1$$
$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

Lema 4. $f(x) = x + 1$

Iskoristimo lemu 3 na početnu jednadžbu i zamijenimo f sa g. Nakon kraćanja izraza dobije se

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

Poznato je da multiplikativna i aditivna Cauchyeva jednadžba ima samo linearna rješenja te laganom provjerom dobijemo da je jedino rješenje $f(x) = x + 1$

26. Završne riječi i zahvale

Organizacija Ljetnog kampa bila je, kao i svake godine, zahtjevna i nepredvidljiva (doduše, bar nam je postalo predviljivo da će biti nepredvidljiva), no uspjeli smo! Iznimno smo zahvalni svima koji su prepoznali naš rad i nesebično nam pomogli u organizaciji još jednog Ljetnog kampa.

Posebno želimo zahvaliti našim domaćinima, Srednjoj školi "Braća Radić" i njezinom učeničkom domu, koji su nam u mnogočemu izašli u susret te omogućiti ugodan, poučan i siguran boravak u Kaštel Štafiliću.

Naravno, Kamp ne bi bio moguć bez svih mentora. Zahvaljujemo im što su svojim trudom svim polaznicima Kampa pružili program bogat aktivnostima i prilikama za učenje, prenijeli im svoje znanje i entuzijazam te ih, nadamo se, potaknuli na daljnje bavljenje matematikom i nakon što je Kamp završio.

Od srca se želimo zahvaliti i našim popularno-znanstvenim predavačima Roču Stilinoviću i Patriciji Dovijanić. Sigurni smo da su svojim prezentacijama učenicima (a i mentorima) odlično predstavili svoje matematičke puteve i da će možda nekad u budućnosti sudionike ovog Kampa zvati kolegama. Naša najveća zahvala ide našem glavnom sponzoru, Jane Streetu. Osim što financijski podupiru sve aktivnosti Udruge, a među njima i posebno Ljetni kamp, također su poslali poklone za sve sudionike.

Jane Street is a quantitative trading firm with offices worldwide. We hire smart, humble people who love to solve problems, build systems and test theories. You'll learn something new every day in our office — whether it's connecting with a colleague to share perspectives, or participating in a talk, class, or game night. Our success is driven by our people and we never stop improving.

Jane Street has a number of opportunities available for students - from multi-day educational programs to learn how we apply Mathematics and Computer Science in our everyday work, through to our global internships as well as full-time roles. Take a look at www.janestreet.com to learn more!

Posebno želimo zahvaliti i Ministarstvu znanosti i obrazovanja na financijskoj potpori za organizaciju Ljetnog kampa i Hrvatskom matematičkom društvu, našem glavnom partneru.

Nadalje, želimo iskreno zahvaliti i ostalim donatorima i sponzorima Udruge: Stype CS, Infobip, Visage, Wiener osiguranje Vienna Insurance Group te Info-point d.o.o. Mnoge donacije su nam pomogle u provedbi svih zamišljenih aktivnosti kroz godinu, a tako i pomogle ne samo da se Ljetni kamp održi, već i da bude sufinanciran ili besplatan mnogim nadarenim učenicima. Hvala vam što ste prepoznali važnost našeg rada te svojim donacijama podržali rad naše Udruge.

Za kraj, zahvaljujemo svim učenicima i roditeljima koji su prepoznali koliko je bitno zadržati želju za učenjem i razvijanjem znanja u STEM području. Hvala vam što ste prepoznali vrijednost znanja i iskustava stečenih na matematičkim kampovima. Ponovni velik odaziv i pozitivni komentari potvrđuje da ono što radimo zaista čini razliku.

Hvala i tebi čitatelju što ne objavljujemo ove knjige uzalud. ☺

Svima vam veliko hvala na svemu!

27. Kontakt

Više informacija o nama i našim projektima možete pronaći i na našoj web stranici: mnm.hr

Ukoliko ste zainteresirani za naš rad ili bilo koji drugi oblik suradnje, slobodno nas kontaktirajte!

Mladi nadareni matematičari "Marin Getaldić"

e-mail: mnm@mnm.hr **kontakti i društvene mreže**: mnm.hr

Ukoliko nam želite pomoći simboličnom donacijom, uplatu možete izvršiti na sljedeći račun u Privrednoj banci Zagreb:

IBAN HR5023400091110348338

Sve donacije iskoristit će se isključivo za financiranje naših projekata i rada Udruge.